İST 417 Lineer Modeller – 4. Hafta

Örnek: Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözümlerini bulunuz.

a. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$

$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 + x_3 = 1$

$\rightarrow\ x_1 = 1/2,\ \ x_2 = 1/2,\ \ x_3 = 1/2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow rank(A) = 3$$

$$(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow rank(A, c) = 3$$

Rank(A)=Rank(A,c) olduğundan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

b. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

$2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -5$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow rank(A) = 2$$

$$(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow rank(A, c) = 3$$

Rank(A)≠Rank(A,c) olduğundan çözüm yoktur.

c. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$

$x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow rank(A) = 2$$

$$(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow rank(A, c) = 2$$

Rank(A)=Rank(A,c), ancak satır sayısı $<$ sütun sayısı olduğundan sonsuz çözüm vardır.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad ve \quad U = x'Ax \ olmak \text{ üzere } \ \frac{\partial U}{\partial x} = ?$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial (x'Ax)}{\partial x} = 2Ax$$

Burada,

$$x'Ax = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_3 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x_1} = 2x_1 + 4x_3$$

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x_2} = 4x_2$$

ve

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x_3} = 4x_1 + 6x_3$$

olarak bulunur. Sonuç olarak,

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_3 \\ 4x_2 \\ 4x_1 + 6x_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$2Ax = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_3 \\ 4x_2 \\ 4x_1 + 6x_3 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Rasgele Vektörlerin Ortalama ve Kovaryans Matrisleri

$$y_{px1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(y) = E \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(y_1) \\ E(y_2) \\ \vdots \\ E(y_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu_{px1}$$

Not: x_{px1} ve y_{px1} $\Rightarrow E(x+y) = E(x) + E(y)$

$$\Sigma = Cov(y) = \begin{bmatrix} Var(y_1) & \cdots & Cov(y_1, y_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(y_1, y_p) & \cdots & Var(y_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Burada,

$\sigma_{11} = {\sigma_1}^2, \dots, \sigma_{pp} = {\sigma_p}^2$ ilgili değişkene ait varyansı,

σ_{12}, y_1 ile y_2, $\sigma_{p-1,p}, y_{p-1}$ ile y_p arasındaki kovaryansı

gösterir.

$$E[(y-\mu)(y-\mu)'] = E\left[\begin{bmatrix} y_1-\mu \\ y_2-\mu \\ \dots \\ y_p-\mu \end{bmatrix} [y_1-\mu \quad y_2-\mu \quad \dots \quad y_p-\mu]\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} (y_1-\mu)^2 & \cdots & (y_1-\mu)(y_p-\mu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1-\mu)(y_p-\mu) & \cdots & (y_p-\mu)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(y_1-\mu)^2 & \cdots & E[(y_1-\mu)(y_p-\mu)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(y_1-\mu)(y_p-\mu)] & \cdots & E[(y_p-\mu)^2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \cdots & {\sigma_p}^2 \end{bmatrix}$$

<u>Not:</u> $E[(y-\mu)(y-\mu)'] = E(yy') - \mu\mu'$

V vektörü aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$V = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} \Rightarrow \mu = E(V) = E\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(y) \\ E(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Burada,

$$\mu_y = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \text{ ve } \mu_x = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix}$$

dir.

V vektörünün varyans kovaryans matrisi ise

$$\Sigma = Cov(V) = Cov\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cov(y,y) & Cov(y,x) \\ Cov(x,y) & Cov(x,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Not: $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yx} = Cov(y,x) = E\left[(y-\mu_y)(x-\mu_x)'\right].$

Teorem:

$a_{px1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$ elemanları sabitlerden oluşan bir vektör ve $y_{px1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$ rastgele bir vektör ise

$$E(a'y) = E(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_py_p) = \left(a_1E(y_1) + a_2E(y_2) + \cdots + a_pE(y_p)\right)$$

$$= (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_p\mu_p) = a'\mu = a'E(y)$$

Burada,

$a' = [a_1 \;\; a_2 \ldots \;\; a_p]$ ve $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$

dir.

Teorem: y rastgele vektör, X rastgele matris, a ve b sabitlerden oluşan vektör, A ve B sabitlerden oluşan matrisler olsun

i. $E(Ay) = AE(y)$
ii. $E(a'Xb) = a'E(X)b$
iii. $E(AXB) = AE(X)B$
iv. $E(Ay + b) = AE(y) + b$

Teorem: y rastgele vektör, a sabitlerden oluşan vektör ve Cov(y)=Σ

$$\Rightarrow Cov(a'y) = a'Cov(y)a = a'\Sigma a$$

Not: $Cov(a'y, b'y) = a'\Sigma b$

Teorem: A_{kxp} sabitlerden oluşan matris, B_{mxp} sabitlerden oluşan matris, y_{px1} rastgele vektör ve Cov(y)=Σ olarak tanımlansın.

i. $Cov(Ay) = A\Sigma A'$

ii. $Cov(Ay, By) = A\Sigma B'$

Not: $Cov(Ay, b)) = A\Sigma A'$

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$Cov(Ay) = Cov\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = Cov\left(\begin{bmatrix} y_1 + 4y_2 \\ 4y_1 + 3y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} V(y_1 + 4y_2) & Cov(y_1 + 4y_2, 4y_1 + 3y_2) \\ Cov(y_1 + 4y_2, 4y_1 + 3y_2) & V(4y_1 + 3y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V(y_1) + 16V(y_2) + 8Cov(y_1, y_2) & 4V(y_1) + 3Cov(y_1, y_2) + 16Cov(y_2, y_1) + 12V(y_2) \\ 4V(y_1) + 3Cov(y_1, y_2) + 16Cov(y_2, y_1) + 12V(y_2) & 16V(y_1) + 9V(y_2) + 24Cov(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

$$Cov(Ay) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(y_1) & Cov(y_1, y_2) \\ Cov(y_1, y_2) & V(y_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V(y_1) + 16V(y_2) + 8Cov(y_1, y_2) & 4V(y_1) + 3Cov(y_1, y_2) + 16Cov(y_2, y_1) + 12V(y_2) \\ 4V(y_1) + 3Cov(y_1, y_2) + 16Cov(y_2, y_1) + 12V(y_2) & 16V(y_1) + 9V(y_2) + 24Cov(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

Teorem: y_{px1} rastgele vektör ve x_{qx1} rastgele vektör ise

$$Cov(y, x) = \Sigma yx$$

dir.

Benzer şekilde, A_{kxp} sabitlerden oluşan matris ve B_{nxq} sabitlerden oluşan matris ise

$$Cov(Ay, Bx) = A\Sigma yxB'$$

dir.