İST 417 Lineer Modeller – 5. Hafta

Çok Değişkenli Normal Dağılımın Özellikleri

y_{px1} rastgele vektörü $N_p(\mu,\Sigma)$ dağılımına sahip ise

$$f(y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p |\Sigma|^{1/2}} e^{-(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)/2}$$

olarak ifade edilir.. Burada,

$$E(y) = \mu \text{ ve } V(y) = \Sigma$$

dir.

<u>Teroem:</u> $y_{px1} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, a_{px1}sabitlerden oluşan vektör ve A_{kxp} sabitlerden oluşan matris ise

i. $a'y \sim N(a'\mu, a'\Sigma a)$
ii. $Ay \sim N(A\mu, A\Sigma A')$

dır.

<u>Not:</u> b_{kx1} sabitlerden oluşan vektör ise $Ay + b \sim N(A\mu + b, A\Sigma A')$ dır.

Projeksiyon Matrisi

X mxn boyutunda bir matris olmak üzere,

$$P_x = X(X'X)^{-1}X'$$

projeksiyon matrisi olarak adlandırılır.

Projeksiton matrisinin özellikleri:

i. $P_x X = X \quad (ispat: \; X(X'X)^{-1}X'X = X)$
ii. P_x iyi tanımlanmıştır.
iii. P_x simetriktir.
iv. P_x idempotenttir.

Eğer P matrisi (iii) ve (iv) eşitliklerini sağlıyorsa ortogonal projeksiyon matrisi olarak adlandırılır.

<u>Örnek:</u> y_{mx1} çok değişkenli normal dağılıma sahip olmak üzere E(y)=Aβ ve Var(y)=$\sigma^2 I_m$ olsun. Burada, A_{mxn} elemanları bilinen bir matris ve β_{nx1} parametre vektörüdür. Rank(A)=r, 0<r<m.

$$\hat{y} = P_A y, \;\; e = y - \hat{y}$$

olmak üzere,

a. $\hat{y}$ nın ve e nin dağılımlarını bulunuz.

b. $Cov(y, e) =$? ve $Cov(\hat{y}, e) =$?

$y_{mx1} \sim N(A\beta, \sigma^2 I_m), \;\; E(y) = A\beta, \;\; Var(y) = \sigma^2 I_m$ olarak verilmişti.

a. $\hat{y} = P_A y$

$\Rightarrow \;\; E(\hat{y}) = E(P_A y) = P_A E(y) = P_A A\beta = A\beta$

$Var(\hat{y}) = Var(P_A y) = P_A Var(y) P_A' = P_A \sigma^2 I P_A' = \sigma^2 P_A P_A' = \sigma^2 P_A P_A \; (simetrik)$

$= \sigma^2 P_A \;\; (idempotent)$

$\Rightarrow \; \hat{y} \sim N(A\beta, \sigma^2 P_A)$ olur.

Benzer şekilde,

$e = y - \hat{y}$

$\Rightarrow \;\; E(e) = E(y - \hat{y}) = E(y) - E(\hat{y}) = A\beta - A\beta = 0$

$Var(e) = Var(y - \hat{y}) = Var(y - P_A y) = Var\big((I - P_A)y\big)$

$= (I - P_A) Var(y) (I - P_A)' = \sigma^2 (I - P_A)$

$\Rightarrow e \sim N\big(0, \sigma^2 (I - P_A)\big)$ olarak bulunur.

b. $Cov(y, e) = E(ye') - E(y)E(e') = E(y(y - P_A y)') - E(y)E((y - P_A y)') =$

$E\big(yy'(I - P_A)\big) - E(y)E\big(y'(I - P_A)\big) = [E(yy') - E(y)E(y')](I - P_A) =$

$\sigma^2 (I - P_A) \neq 0$

$\Rightarrow$ y ve e bağımsız değildir.

Benzer şekilde,

$Cov(\hat{y}, e) = E(\hat{y}e') - E(\hat{y})E(e')$

$= E(P_A y (y - P_A y)') - E(P_A y) E((y - P_A y)')$

$= E\big(P_A y y' (I - P_A)\big) - P_A E(y) E(y')(I - P_A)$

$= P_A E(yy')(I - P_A) - P_A E(y) E(y')(I - P_A)$

$= P_A [E(yy') - E(y)E(y')](I - P_A)$

$= P_A \sigma^2 (I - P_A) = P_A \sigma^2 - P_A \sigma^2 = 0$

$\Rightarrow \; \hat{y} \; ve \; e \; bağımsızdır.$

Örnek: x nx1 ve y mx1 boyutunda rastgele vektörler ve bu vektörlere ait beklen değer ve varyans-kovaryans matrisi

$$E\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, \ V\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x & V_{xy} \\ V_{xy} & V_y \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın.

V_x non-singular bir matris ve $e = y - [\mu_y + V_{xy}{}' V_x{}^{-1}(x - \mu_x)]$ ise

a. $E(e) = 0 \ ve \ Var(e) = V_y - V_{xy}{}' V_x{}^{-1} V_{xy}$ olduğunu gösteriniz
b. $Cov(x, e) = 0$ olduğunu gösteriniz.

   a. $e = y - \left[\mu_y + V_{xy}{}' V_x{}^{-1}(x - \mu_x)\right]$

   $\mathrm{E}(e) = \left[E(y) - \mu_y\right] - V_{xy}{}' V_x{}^{-1} E(x - \mu_x) = 0$

   $Var(e) = Var\left(y - \mu_y - V_{xy}{}' V_x{}^{-1}(x - \mu_x)\right) = Var\left(y - V_{xy}' V_x{}^{-1} x\right)$

   $= Var(y) + Var(V_{xy}' V_x{}^{-1} x) - Cov\left(y, V_{xy}' V_x{}^{-1} x\right) - Cov\left(V_{xy}' V_x{}^{-1} x, y\right)$

   $= V_y + V_{xy}' V_x{}^{-1} Var(x) V_x{}^{-1} V_{xy} - Cov(y, x) V_x{}^{-1} V_{xy} - V_{xy}' V_x{}^{-1} Cov(x, y)$

   $= V_y + V_{xy}' V_x{}^{-1} V_{xy} - V_{xy}' V_x{}^{-1} V_{xy} - V_{xy}' V_x{}^{-1} V_{xy}$

   $= V_y - V_{xy}' V_x{}^{-1} V_{xy}$

   b. $Cov(x, e) = Cov\left(x, y - \mu_y - V_{xy}{}' V_x{}^{-1}(x - \mu_x)\right) = cov\left(x, y - V_{xy}{}' V_x{}^{-1} x\right)$

   $= Cov(x, y) - Cov\left(x, V_{xy}{}' V_x{}^{-1} x\right)$

   $= V_{xy} - V_x\left(V_x{}^{-1} V_{xy}\right) = V_{xy} - V_{xy} = 0$