İST 417 Lineer Modeller – 6. Hafta

Karesel Formların Dağılımlarına Giriş

<u>Tanım 1:</u> y, R^n de rastgele bir vektör olmak üzere, y nin beklenen değeri ve varyans-kovaryans matrisi sırasıyla

$$\mu = E(y) = \begin{bmatrix} E(y_1) \\ E(y_2) \\ \vdots \\ E(y_n) \end{bmatrix}$$

$$Var(y) = E\big((y-\mu)(y-\mu)'\big) = \begin{bmatrix} Var(y_1) & Cov(y_1, y_2) & \dots & Cov(y_1, y_n) \\ Cov(y_2, y_1) & Var(y_2) & \dots & Cov(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(y_n, y_1) & Cov(y_n, y_2) & \dots & Var(y_n) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

<u>Tanım 2:</u> Merkezi ve merkezi olmayan ki-kare dağılımları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. y nx1 boyutlu rastgele vektörü 0 ortalama ve I varyans ile normal dağılıma sahip ise
$$y'y$$
ifadesi n serbestlik derecesi ile merkezi ki-kare dağılımına sahiptir.
2. y nx1 boyutlu rastgele vektörü μ ortalama ve I varyansı ile normal dağılıma sahip ise
$$y'y$$
ifadesi n serbestlik derecesi ve $\lambda = \mu'\mu$ merkezi olmama parametresi ile merkezi olmayan ki-kare dağılımına sahiptir.

<u>Teorem 1 (Cochran Teoremi):</u> y nx1 boyutlu rastgele vektörü μ ortalama ve I varyans ile normal dağılıma sahip ve

$$y'A_1y,\ y'A_2y,\ \dots, y'A_ky$$

karesel formlarının toplamı $y'y$ olsun.

Bu durumda,

$$y'A_iy,\ \ i = 1, \dots, k$$

karesel formlarının

i. rank(A_i) serbestlik derecesi ve $\lambda_i = \mu' A_i \mu$ merkezi olmama parametresi ile ki-kare dağılıma sahip ve
ii. Bağımsız olmaları

için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{k} rank(A_i) = n$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

<u>Teorem 2:</u> y nx1 boyutlu μ ortalama ve I varyans ile normal dağılıma sahip rastgele bir vektör, A_1 ve A_2 matrisleri nxn boyutlu simetrik ve idempotent matrisler olsun. Bu durumda,

i. $y'A_1y$ karesel formu rank(A_1) serbestlik derecesi ve $\mu'A_1\mu$ merkezi olmama parametresi ile merkezi olmayan ki-kare dağılımına sahiptir.

ii. $y'A_1y \; ve \; y'A_2y$ karesel formlarının bağımsız olmaları için gerek ve yeter koşul $A_1A_2 = 0$ olmasıdır.

<u>Örnek:</u> $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ortalaması μ varyansı σ^2 olan kitleden rastgele bir örneklem olsun.

$\sum {y_i}^2 = \sum {y_i}^2 - n\bar{y}^2 + n\bar{y}^2 = \sum(y_i - \bar{y})^2 + n\bar{y}^2 \quad (*)$ ifadesini karesel form cinsinden yazınız.

$y' = [y_1, y_2, \ldots, y_n],\; j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ olarak tanımlanır. Buradan,

$$\sum {y_i}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = [y_1, y_2, \ldots, y_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y'y = y'Iy$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i = \frac{1}{n}[1 \ldots 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} j'y$$

bulunur. Bu eşitlik kullanılarak,

$$n\bar{y}^2 = n\bar{y}\bar{y} = n\left(\frac{1}{n}j'y\right)'\left(\frac{1}{n}j'y\right) = \frac{1}{n}y'jj'y = \frac{1}{n}y'Jy = y'\left(\frac{1}{n}J\right)y$$

bulunur.

<u>Not:</u> $jj' = J = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Yukarıda bulunan eşitlikler yarımıyla,

$$\sum(y_i-\bar{y})^2=\sum y_i{}^2-n\bar{y}^2=y'Iy-y'\left(\frac{1}{n}J\right)y=y'\left(I-\frac{1}{n}J\right)y$$

olduğu görülür. Buradan (*) ifadesi karesel formlar cinsinden

$$y'Iy=\ y'\left(I-\frac{1}{n}J\right)y+y'\left(\frac{1}{n}J\right)y$$

şeklinde yazılır.

Karesel formlardaki matrisler aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $I=\left(I-\frac{1}{n}J\right)+\left(\frac{1}{n}J\right)$

ii. $I,\left(I-\frac{1}{n}J\right)\ ve\ \left(\frac{1}{n}J\right)$ idempotenttir.

iii. $\left(I-\frac{1}{n}J\right)\left(\frac{1}{n}J\right)=0$

<u>Not:</u> Bu üç özellikten dolayı $y_i \sim Normal$ dağılıma sahip ise

$\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{\sigma^2}\ ve\ \frac{n\bar{y}^2}{\sigma^2}$ nin dağılımları χ^2 dir ve bağımsızdırlar.

<u>Örnek:</u> y=[y_1 y_2 y_3]' rastgele vektörünün ortalaması ve varyans-kovaryans matrisi

$\mu=\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\ \ ve\ \ \Sigma=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&4&2\\0&2&2\end{bmatrix}$ olarak verilmiştir.

a. $z=2y_1-3y_2+y_3\ \ \Rightarrow E(z)=?,\ Var(z)=?$

b. $z_1=y_1+y_2+y_3,\ \ z_2=3y_1+y_2-2y_3\ \ ve\ z=[z_1\ z_2]'\ \Rightarrow\ E(z)=?,\ Var(z)=?$

a. $z=2y_1-3y_2+y_3$

$$a=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix},\ \ z=a'y$$

$$E(z)=E(a'y)=a'E(y)=a'\mu=[2\ -3\ \ 1]\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}=7$$

$$Var(z)=Var(a'y)=a'Var(y)a=[2\ -3\ \ 1]\begin{bmatrix}3&1&0\\1&4&2\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}=26$$

b. $E(z)=\begin{bmatrix}E(z_1)\\E(z_{2)}\end{bmatrix},\ \ a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \ a_2=\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix},$

$$E(z_1) = E(a_1'y) = a_1'E(y) = [1\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix} = 9$$

$$E(z_2) = E(a_2'y) = a_2'E(y) = [3\ \ 1\ \ -2]\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix} = -5$$

$$Cov(z) = \begin{bmatrix}\Sigma_{z_1z_1} & \Sigma_{z_1z_2}\\ \Sigma_{z_2z_1} & \Sigma_{z_2z_2}\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{z_1z_1} = Cov(a_1'y) = a_1'Cov(y)a_1 = [1\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\1 & 4 & 2\\0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 15$$

$$\Sigma_{z_1z_2} = Cov(a_1'y, a_2'y) = a_1'Cov(y)a_2 = [1\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\1 & 4 & 2\\0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix} = 11$$

$$\Sigma_{z_2z_2} = Cov(a_2'y) = a_2'Cov(y)a_2 = [3\ \ 1\ \ -2]\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\1 & 4 & 2\\0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix} = 37$$

$$\Rightarrow E(z) = \begin{bmatrix}9\\-5\end{bmatrix},\ \ Cov(z) = \begin{bmatrix}15 & 11\\11 & 37\end{bmatrix}$$

Örnek:

$y = [y_1\ \ y_2\ \ y_3]'$ rastgele vektörünün ortalaması μ ve varyans kovaryans matrisi Σ aşağıda verilmiştir:

$$\mu = \begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\2 & 2 & 3\\0 & 3 & 10\end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

$W = Ay$ ise $E(W) = ?$ $Cov(W) = ?$

$$E(W) = AE(y) = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\15\\10\end{bmatrix}$$

$$Cov(W) = Cov(Ay) = A\Sigma A' = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\2 & 2 & 3\\0 & 3 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\2 & 2 & 1\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}54 & 78 & 51\\78 & 144 & 93\\51 & 93 & 60\end{bmatrix}$$

Örnek: $y = [y_1 \;\; y_2 \;\; y_3]'$ rastgele vektörünün ortalaması μ ve varyans kovaryans matrisi Σ aşağıda verilmiştir:

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$z = y_1 - 2y_2 + y_3 = [1 \;\; -2 \;\; 1]y = a'y$ olarak tanımlanırsa z nin dağılımını bulunuz.

$$a'\mu = [1 \;\; -2 \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \;\; \text{ve}$$

$$a'\Sigma a = [1 \;\; -2 \;\; 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 13$$

olduğundan $z \sim N(-3{,}13)$ bulunur. Benzer şekilde,

$z_1 = y_1 - y_2 + y_3$

$z_2 = 3y_1 + y_2 - 2y_3$ olmak üzere,

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ay \text{ ise z'nin dağılımını bulunuz.}$$

$$A\mu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \;\; \text{ve}$$

$$A\Sigma A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}$$

olduğundan $z \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}\right)$ bulunur.