İST 417 Lineer Modeller – 7. Hafta

Karesel Formların Ortalama ve Varyansı

Teorem: y'Ay karesel formunun beklenen değeri

$$E(y'Ay) = tr(A\Sigma) + \mu' A \mu$$

olarak verilir. Burada,

y: rastgele vektör

A: sabitlerden oluşan simetrik bir matris

tir.

Örnek: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rastgele örneklemi için $E(y_i)=\mu$ ve $Var(y_i)=\sigma^2$ olarak verilsin. Buradan,

$E(y) = \mu j \quad ve \qquad Cov(y) = \sigma^2 I = \Sigma$ dir. Buna göre,

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = y'\left(I - \frac{1}{n}J\right)y$ karesel formunun beklenen değerini bulunuz.

$$E(y'Ay) = tr(A\Sigma) + \mu' A \mu = tr\left(\left(I - \frac{1}{n}J\right)\Sigma\right) + \mu'\left(I - \frac{1}{n}J\right)\mu$$

$$= \sigma^2 tr\left(I - \frac{1}{n}J\right) + \mu^2(j'j - j'(jj')j)$$

$$= \sigma^2\left(n - \frac{n}{n}\right) + \mu^2\left(n - \frac{1}{n}n^2\right) = \sigma^2(n-1) + 0 = \sigma^2(n-1)$$

$$E(s^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}\right) = \frac{E(y'Ay)}{n-1} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

Örnek: $(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$, $E(x)=\mu_x$, $E(y)=\mu_y$, $Var(x)=\sigma_x^2$, $Var(y)=\sigma_y^2$ ve $Cov(x,y)=\sigma_{xy}$ olan kitleden iki değişkenli rastgele örneklem olsun.

$\sigma_{xy} = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right] \rightarrow kitle\ kovaryans$ı

$s_{xy} = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \rightarrow$ $örneklem\ kovaryans$ı

olmak üzere s_{xy} nin beklenen değerini bulunuz.

$$s_{xy} = \frac{x'\left[I - \left(\frac{1}{n}\right)J\right]y}{n-1} = \frac{x'Ay}{n-1}$$

olarak yazılabilir.

$V = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ ise

$$E(V) = E\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_y j \\ \mu_x j \end{bmatrix}$$

$$Cov(V) = Cov\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 I & \sigma_{xy} I \\ \sigma_{xy} I & \sigma_x^2 I \end{bmatrix}$$

Burada, $A = I - \left(\frac{1}{n}\right)J$

$$\begin{aligned} E\left[x'\left[I - \left(\frac{1}{n}\right)J\right]y\right] &= tr\left[\left(I - \frac{1}{n}J\right)\Sigma_{xy}\right] + \mu_x'\left(I - \frac{1}{n}J\right)\mu_y \\ &= \sigma_{xy} tr\left[\left(I - \frac{1}{n}J\right)\right] + \mu_x\mu_y\left(j'j - j'\frac{1}{n}Jj\right) \\ &= \sigma_{xy}\left(n - \frac{1}{n}n\right) + \mu_x\mu_y\left(j'j - \frac{1}{n}j'jj'j\right) \\ &= \sigma_{xy}(n-1) + \mu_x\mu_y\left(n - \frac{1}{n}n.n\right) = \sigma_{xy}(n-1) \end{aligned}$$

$$E(s_{xy}) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sigma_{xy}(n-1)}{n-1} = \sigma_{xy}$$

Merkezi Olmayan χ^2 Dağılımı

Merkezi χ^2 Dağılımı: $z_1, z_2, \ldots, z_n \sim N(0,1)$ dağılımından rastgele bir örneklem, bir başka deyişle,

$$E(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V(z) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow z \sim N_n(0, I) \text{ ise}$$

$z_i^2 \sim \chi^2_{(1)}$ (i=1,2, ... , n) ve $\sum z_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$ dir.

Merkezi Olmayan χ^2 Dağılımı: $y_1, y_2, \ldots, y_n \sim N(\mu_i, 1)$ dağılımından rastgele bir örneklem, bir başka deyişle,

$$E(z) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad V(z) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y \sim N_n(\mu, I) \text{ ise}$$

$V = \sum y_i^2 = y'y$ dağılımı merkezi χ^2 değildir. Ancak

$U = \sum(y_i - \mu_i)^2 = (y-\mu)'(y-\mu) \sim \chi^2_{(n)}$ dir, çünkü $(y_i - \mu_i) \sim N(0,1)$ dir.

$V = \sum y_i^2 = y'y \sim \chi^2_{(n,\lambda)}$ (merkezi olmayan ki – kare) ve

$\lambda = \frac{1}{2}\sum \mu_i^2 = \frac{1}{2}\mu'\mu$ merkezi olmama (noncentrality) parametresidir.

Not:

$E(\sum(y_i - \mu_i)^2) = \sum E(y_i - \mu_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

$E(\sum y_i^2) = \sum E(y_i^2) = \sum(\sigma_i^2 + \mu_i^2) = \sum(1 + \mu_i^2) = n + \sum \mu_i^2 = n + 2\lambda$

Teorem: $v_1, v_2, \ldots, v_k \sim \chi^2(n_i, \lambda_i)$ ve $v_i$ler bağımsız olmak üzere,

$\sum v_i \sim \chi^2_{(\sum n_i, \sum \lambda_i)}$ dir.

Merkezi Olmayan F Dağılımı

Merkezi F Dağılımı:

$w = \frac{U/p}{V/q} \sim F(p,q)$, burada $U \sim \chi^2_{(p)}$ ve $V \sim \chi^2_{(q)}$ dir. U ve V bağımsızdır.

Merkezi Olmayan F Dağılımı:

$z = \frac{U/p}{V/q} \sim F(p,q,\lambda)$, burada $U \sim \chi^2_{(p,\lambda)}$ ve $V \sim \chi^2_{(q)}$ dir. U ve V bağımsızdır.

Merkezi Olmayan t Dağılımı

Merkezi t Dağılımı:

$t = \frac{Z}{\sqrt{U/p}} \sim t_{(p)}$, burada $Z \sim N(0,1)$ ve $U \sim \chi^2_{(p)}$ dir. Z ve U bağımsızdır.

Merkezi Olmayan t Dağılımı:

$t = \frac{Y}{\sqrt{U/p}} \sim t_{(p,\mu)}$, burada $Y \sim N(\mu, 1)$ ve $U \sim \chi^2_{(p)}$ dir. Y ve U bağımsızdır.

Karesel Formların Dağılımı

$y \sim N_n(\mu, I) \Rightarrow (y-\mu)'(y-\mu) \sim \chi^2_{(n)}$

$$y \sim N_n(\mu, \Sigma) \Rightarrow (y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu) \sim \chi^2_{(n)} = (y-\mu)'\Sigma^{-1/2}\Sigma^{-1/2}(y-\mu)$$
$$= [\Sigma^{-1/2}(y-\mu)]'[\Sigma^{-1/2}(y-\mu)]$$

Teorem: $y \sim N_n(\mu, \Sigma)$

A: rankı r olan sabitlerden oluşan simetrik matris

$\lambda = \frac{1}{2}\mu' A \mu$:merkezi olmama parametresi

$y'Ay \sim \chi^2_{(r,\lambda)} \Leftrightarrow A\Sigma\ idempotent$

Not: $y \sim N_p(0, I) \Rightarrow y'Ay \sim \chi^2_{(r)} \Leftrightarrow$ A rankı r olan idempotent matristir.

Not: $y \sim N_p(\mu, \sigma^2 I) \Rightarrow \frac{y'Ay}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\left(r, \frac{\mu' A \mu}{2\sigma^2}\right)} \Leftrightarrow$ A rankı r olan idempotent matristir.

Örnek: $y \sim N_n(\mu j, \sigma^2 I)$ ise $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2}$ nin dağılımını bulunuz.

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = y' \left[I - \left(\frac{1}{n}\right) J\right] y$$

$rank \left[I - \left(\frac{1}{n}\right) J\right] = tr \left[I - \left(\frac{1}{n}\right) J\right] = n - 1$ (idempotent)

$$\lambda = \frac{\mu' A \mu}{2\sigma^2} = \frac{\mu j' \left[I - \left(\frac{1}{n}\right) J\right] \mu j}{2\sigma^2} = \frac{\mu^2 \left(j'j - \frac{1}{n} j'Jj\right)}{2\sigma^2} = \frac{\mu^2 \left(n - \frac{1}{n} j'jj'j\right)}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{\mu^2 \left(n - \frac{1}{n}.n.n\right)}{2\sigma^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y' \left[I - \left(\frac{1}{n}\right) J\right] y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$