İST 417 Lineer Modeller – 8. Hafta

Lineer ve Karesel Formların Bağımsızlığı

Teorem:

B: sabitlerden oluşan kxp boyutunda matris

A: sabitlerden oluşan pxp boyutunda simetrik matris

$y \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$By \; ve \; y'Ay$ bağımsızdır. $\Leftrightarrow B\Sigma A = 0$

Örnek:

$s^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}, \; y \sim N_n(\mu j, \sigma^2 I), \; s^2 \; ve \; \bar{y}$ nin bağımsız olduğunu gösteriniz.

$\bar{y} = \frac{1}{n} j'y$ ve $s^2 = \frac{y'\left[I - \left(\frac{1}{n}\right)J\right]y}{n-1}$ bağımsızdır; çünkü

$$\frac{1}{n} j' \left[I - \left(\frac{1}{n}\right)J\right] = \frac{1}{n} j' - \frac{1}{n} . \frac{1}{n} j'jj = \frac{1}{n} j' - \frac{1}{n} j' = 0$$

Teorem: A ve B sabitlerden oluşan simetrik matris

$y \sim N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow y'Ay \quad ve \; y'By$ bağımsızdır $\Leftrightarrow A\Sigma B = 0$

Örnek:

$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 + n\bar{y}^2, \; \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \; ve \; n\bar{y}^2$ birbirinden bağımsız mıdır?

$$y'y = y' \left[I - \left(\frac{1}{n}\right)J\right] y + y' \left[\left(\frac{1}{n}\right)J\right] y$$

$y \sim N_n(\mu j, \sigma^2 I)$ olmak üzere

$y' \left[I - \left(\frac{1}{n}\right)J\right] y \;\; ve \;\; y' \left[\left(\frac{1}{n}\right)J\right] y$ bağımsızdır; çünkü

$$\left[I - \left(\frac{1}{n}\right)J\right]\left[\left(\frac{1}{n}\right)J\right] = 0$$

Teorem:

$y \sim N_n(\mu j, \sigma^2 I)$

A_i: simetrik ve rank(A_i)=r_i, i=1,2,...,k

$y'Ay = \sum_{i=1}^{k} y' A_i y, \;\; A = \sum_{i=1}^{k} A_i, \;\; rank(A) = r$ ise

i. $\frac{y_i' A_i y_i}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\left(r_i, \frac{\mu' A_i \mu}{2\sigma^2}\right)}$, $i = 1,2,\dots,k$

ii. $y' A_i y$ ve $y' A_j y$ bağımsızdır, tüm $i \neq j$ için.

iii. $\frac{y' A y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\left(r, \frac{\mu' A \mu}{2\sigma^2}\right)}$

Bu üç şart ancak ve ancak aşağıdaki üç şartın ikisinin sağlanması durumunda sağlanır.

a. Her bir A_i idempotenttir.

b. $A_i A_j = 0$, $\forall i \neq j$

c. $A = \sum_{i=1}^{k} A_i$ idempotenttir.

Ya da ancak ve ancak c. ve aşağıda verilen d. koşulların sağlanması durumlarında sağlanır.

d. $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$

<u>Örnek:</u> $y \sim N_3(\mu, \Sigma)$ ve

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$y' A y \sim \chi^2_{(3, \frac{1}{2}\mu' A \mu)}$ dağılımının merkezi olmama parametresi λ'yı bulunuz.

Öyle bir simetrik A matrisi bulalımki, $A\Sigma$ idempotent olsun.

$A\Sigma = I$ olursa $A = \Sigma^{-1}$ olur. Buradan,

$$A = \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \text{ ve } rank(A) = 3$$

bulunur.

$$\mu' A \mu = [1 \ \ -2 \ \ 3] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2.8$$

olarak hesaplandığından $\lambda = \frac{1}{2}\mu' A \mu = \frac{2.8}{2} = 1.4$ olarak elde edilir.

Örnek: $y \sim N_3(\mu, \Sigma)$ ve

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$y'Ay \sim \chi^2_{(4, \frac{1}{2}\mu' A\mu)}$ dağılımının merkezi olmama parametresi λ'yı bulunuz.

Öyle bir simetrik A matrisi bulalımki, $A\Sigma$ idempotent olsun.

$A\Sigma = I$ olursa $A = \Sigma^{-1}$ olur. Buradan,

$$A = \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 2.5 & 1.5 \end{bmatrix} \text{ ve } rank(A) = 4$$

bulunur. Sonuç olarak, merkezi olmama parameteresi

$$\lambda = \frac{1}{2}\mu' A\mu = \frac{1}{2}[2 \ -2 \ 3 \ 5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 2.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 79$$

olarak elde edilir.

Örnek: $y \sim N_3(\mu, \sigma^2 I)$ ve

$$\mu = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

a. $\frac{y' Ay}{\sigma^2}$ nin dağılımını bulunuz.

b. $y'Ay$ ve By bağımsız mıdır?

c. $y'Ay$ ve $y_1 + y_2 + y_3$ bağımsız mıdır?

a. $y'Ay$ nin karesel form olabilmesi için A nın idempotent olması gerekmektedir.

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A idempotenttir ve rank(A)=2 dir. Buradan,

$$\lambda = \frac{1}{2}\mu' A\mu = \frac{1}{2}[3 \ -2 \ 1] \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6.3$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\frac{y'Ay}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\left(2,\frac{1}{2\sigma^2}\mu' A\mu\right)} \rightarrow \frac{y'Ay}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\left(2,\frac{6.3}{\sigma^2}\right)}$$

bulunur.

b. $BA = 0 \Rightarrow y'Ay \ ve \ \ By$ bağımsızdır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$y'Ay \ ve \ \ By$ bağımsız değildir.

c. $y_1 + y_2 + y_3 = [1 \ \ 1 \ \ 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = j'y$ olduğundan $B = [1 \ \ 1 \ \ 1]$ olur.

$$BA = [1 \ \ 1 \ \ 1] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [0 \ \ 0 \ \ 0] \quad \text{olduğundan} \quad y'Ay \quad \text{ve} \quad y_1 + y_2 + y_3$$

bağımsızdır.

<u>Örnek:</u> $y \sim N_3(\mu, \sigma^2 I)$ ve

$\mu = [1 \ \ 2 \ \ 3]' \qquad B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

a. $\frac{y'By}{\sigma^2}$ nin dağılımını bulunuz.

b. $y'By$ ile $y'Ay$ bağımsız mıdır?

a. B matrisinin idempotent olması gerekmektedir.

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{olduğundan B idempotenttir.}$$

$rank(B) = 1$

$$\lambda = \frac{1}{2} \mu' A\mu = \frac{1}{2} [1 \ \ 2 \ \ 3] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$$

$$\frac{y'Ay}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\left(2,\frac{1}{2\sigma^2}\mu' B\mu\right)} \rightarrow \frac{y'Ay}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\left(1,\frac{6}{\sigma^2}\right)}$$

b. $BA = 0$ olmalı.

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olduğundan } y'Ay \ ve \ \ By \text{ bağımsızdır.}$$