İST 417 Lineer Modeller – 10. Hafta

Çoklu Lineer Regresyon Tahmini

Çoklu lineer regresyon modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

olarak tanımlanır.

Not:

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^2 + \varepsilon_i \rightarrow$ Bu model parametreye göre lineer

$y_i = \beta_0 + e^{\beta_1 x_i} + \varepsilon_i \rightarrow$ Bu model parametreye göre lineer değil.

Varsayımlar:

i. $E(\varepsilon_i) = 0,\ i = 1,2,\dots,n$ ya da $E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}$

ii. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2,\ i = 1,2,\dots,n$ ya da $Var(y_i) = \sigma^2$

iii. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j$ ya da $Cov(y_i, y_j) = 0$

y_i ler

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_k x_{2k} + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n$$

olarak yazılabilir.

Bu denklemler aşağıda gösterildiği gibi

$$y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde matris formatında da yazılabilir. Burada,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Burada, rank(X)=k+1 dir. Yukarıda verilen 3 varsayım aşağıda gösterildiği gibi 2 varsayım olarak da ifade edilebilir.

i. $E(\varepsilon) = 0$ ya da $E(y) = X\beta$

ii. $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ ya da $Cov(y) = \sigma^2 I$ (ii. ve iii. varsayımlara denk)

$\sigma^2 I = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \rightarrow Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ ve \ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ anlamına gelir.

β ve σ² nin Tahmini

β nın EKK Tahmin Edicisi:

β nın EKK tahmin edicisi

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_k x_{ik})^2$$

ifadesinin β parametresine göre türevinin alınıp 0 a eşitlenmesi ile bulunur.

Teorem:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Modelinde $X_{nx(k+1)}$ boyutunda bir matris ve rank(X)=k+1<n (tam ranklı ise) β nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

olarak bulunur.

İspat:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i\hat{\beta})^2 = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$$

$X_i' = [1 \ \ x_{i1} \ \ x_{i2} \ \ldots \ x_{ik}]$, bir başka deyişle model matrisi X in i. satırıdır.

$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$

$\Rightarrow \frac{\partial(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})}{\partial\hat{\beta}} = 0 - 2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0$

$2X'X\hat{\beta} = 2X'y \rightarrow Normal\ denklemler$

$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ (X tam ranklı ve X’X non-singular)

Şimdi $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ eşitliğini kullanarak $\hat{\beta}$ yı bulalım.

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} & \dots & \sum x_{ik} \\ & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum x_{i1}x_{ik} \\ & & \sum x_{i2}^2 & \dots & \sum x_{i2}x_{ik} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sum x_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum x_{ik}y_i \end{bmatrix}$$

Kolaylık olması bakımından bu örneği k=1 (Basit Doğrusal Regresyon) modeli için çözelim.

k=1 için

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \qquad X'y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \frac{1}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 \left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right) \\ -\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) + n\sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\beta_0} = \frac{\sum x_i^2 \left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum x_i^2\, n\bar{y} - n\bar{x}\sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - n^2\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x_i^2\,\bar{y} - \sum x_i y_i \bar{x}}{\sum x_i^2 - n\,\bar{x}^2}$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) + n\sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{n\sum x_i y_i - n^2\bar{x}\bar{y}}{n\sum x_i^2 - n^2\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\,\bar{x}^2}$$

bulunur.

Aşağıdaki teoremlerde X matrisinin sabitlerden oluşan ve tam ranklı olduğu varsayılmıştır.

Teorem: $E(y) = X\beta \;\; \Rightarrow \; \hat{\beta}, \beta$ parametresinin yansız bir tahmin edicisidir.

İspat: $E(\hat{\beta}) = E((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X'E(y) = (X'X)^{-1}X'X\beta = \beta$

dır. Dolayısıyla, $\hat{\beta}, \beta$ parametresinin yansız bir tahmin edicisidir.

Teorem: $Cov(y) = \sigma^2 I$ ise $Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

İspat: $Cov(\hat{\beta}) = \; Cov((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X'Cov(y)((X'X)^{-1}X')'$

$$= (X'X)^{-1}X'((X'X)^{-1}X')'\sigma^2 \; = (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}\sigma^2 = (X'X)^{-1}\sigma^2$$

Örnek: Basit doğrusal regresyon modeli için $Var(\hat{\beta}_0), Var(\hat{\beta}_1) \; ve \; Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ yı bulunuz.

$Cov(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2$

Bir önceki örnekten

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix}$$

olarak bulunmuştu. Bu nedenle

$$Cov(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$Cov(\hat{\beta}) = Cov\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix}$$

olarak ifade edildiğinden

$Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sigma^2, \; Var(\hat{\beta}_1) = \frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sigma^2$ ve $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\sum x_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sigma^2$

bulunur.