

İST 417 Lineer Modeller – 14. Hafta

Tahmin Edilebilirlik

Genel lineer model

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

olarak gösterilmek üzere

$$X'X\hat{\beta} = X'y$$

normal denklemler (normal equations) olarak adlandırılır. Burada, $\hat{\beta}$, β parametresinin tahmin edicisidir.

Not: $X'X$ singular (tekil) \Rightarrow Normal denklemlerin sonsuz tane çözümü vardır. Bu durumda, $\hat{\beta}$ yerine β^o ifadesi kullanılır ve normal denklemler

$$X'X\beta^o = X'y$$

şeklinde ifade edilir. Burada, β^o , β nın tahmin edicisini değil normal denklemlerin herhangi bir çözümünü ifade eder.

Örnek: Bir-yönlü deney tasarımı modeli için

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3$$

$X'X\beta = X'y$ şeklinde ifade edilen normal denklemlerin

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^o \\ \alpha_1^o \\ \alpha_2^o \\ \alpha_3^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 21 \\ 36 \\ 24 \end{bmatrix}$$

olarak verildiğini varsayalım. $X'X$ matrisinde 2., 3. ve 4. satırların (veya sütunların) toplamı 1. satırı (veya sütunu) verdiği için $X'X$ matrisi singular (tekil) dir. Bu nedenle normal denklemlerin sonsuz tane çözümü vardır. Bu çözümlerden 2 tanesi

	Çözüm 1 (β_1^o)	Çözüm 2 (β_2^o)
μ^o	0	8
α_1^o	7	-1
α_2^o	12	4
α_3^o	8	0

olarak verilsin.

$\frac{1}{2}(\alpha_1^o + \alpha_2^o)$ ve $\frac{\mu^o + \alpha_1^o + \alpha_2^o + \alpha_3^o}{3}$ lineer fonksiyonları ile ilgilendiğimizi varsayalım.

	Çözüm 1 (β_1^o)	Çözüm 2 (β_2^o)
$\frac{1}{2}(\alpha_1^o + \alpha_2^o)$	9.5	1.5
$\frac{\mu^o + \alpha_1^o + \alpha_2^o + \alpha_3^o}{3}$	9	$\frac{11}{3}$

İlgilenilen lineer fonksiyonlar tahmin edilebilir olmadığı için sonuçlar birbirinden farklıdır.

Şimdi aşağıda verilen lineer fonksiyonları ve çözüm değerlerini inceleyelim.

	Çözüm 1 (β_1^o)	Çözüm 2 (β_2^o)
$(\alpha_1^o - \alpha_2^o)$	-5	-5
$\mu^o + \alpha_2^o$	12	12
$\mu^o + \frac{1}{2}(\alpha_1^o + \alpha_2^o)$	9.5	9.5
$\frac{1}{2}(\alpha_1^o + \alpha_2^o) - \alpha_3^o$	1.5	1.5

İlgilenilen lineer fonksiyonlar tahmin edilebilir olduğu için bütün sonuçlar aynıdır, bir başka deyişle β_1^o ve β_2^o değişmezdir (invariant).

Not: Bu fonksiyonlar tahmin edilebilir fonksiyonların tahmin edicisi olarak adlandırılır (estimators of the estimable functions).

Örnek:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \text{ modelinde } E(y_{1j}) = \mu + \alpha_1, E(y_{2j}) = \mu + \alpha_2$$

$$\Rightarrow E(y_{1j} - y_{2j}) = \mu + \alpha_1 - \mu - \alpha_2 \text{ olduğundan } \alpha_1 - \alpha_2 \text{ tahmin edilebilirdir.}$$

Özellikler

1. Herhangi bir gözlemin beklenen değeri tahmin edilebilirdir. Örnek;

$$E(y_{1j}) = \mu + \alpha_1 \Rightarrow \mu + \alpha_1 \text{ tahmin edilebilirdir.}$$

2. Tahmin edilebilir fonksiyonların lineer kombinasyonları da tahmin edilebilirdir.

3. $\lambda'\beta$ tahmin edilebilir $\Rightarrow \lambda'\beta = E(a'Y) = a'E(Y) = a'X\beta$ dır (bazı a' için).

Buradan,

$$\lambda'\beta = a'X\beta \Rightarrow \lambda' = a'X \text{ olduğu görülebilir.}$$

4. $\lambda'\beta$ tahmin edilebilir ise $\lambda'\beta^o$, $X'X\beta^o = X'y$ olarak ifade edilen normal denklemlerin herhangi bir çözümü β^o için değişmezdir.

5. $\lambda'\beta$ tahmin edilebilir fonksiyonunun BLU tahmin edicisi $\lambda'\beta^o$ dır. Bir başka deyişle,

$$\widehat{\lambda'\beta} = \lambda'\beta^o$$

dır.

$\lambda'\beta^o$ nın Beklenen Değer ve Varyansı

$$E(\lambda'\beta^o) = \lambda'E(\beta^o) = \lambda'\beta$$

$$V(\beta^o) = ((X'X)^{-1}X'y) = V(GX'y) = GX'V(y)XG' = GX'XG'\sigma^2$$

$$V(\lambda'\beta^o) = \lambda'GX'XG'\lambda\sigma^2 = \lambda'GX'XG'X'a\sigma^2 = \lambda'GX'a\sigma^2 = \lambda'G\lambda\sigma^2$$

$\lambda'\beta$ için %100(1- α) Güven Aralığı

$$\lambda'\beta^o \pm \frac{\hat{\sigma}t_{\alpha}(N-t)\sqrt{\lambda'G\lambda}}{2}$$

Örnek: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta z_{ij} + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \dots, a$, $j = 1, \dots, n_i$ ortak değişkenli bir-yönlü deney tasarımı modeli olmak üzere,

a. Tasarım matrisi X in rankını bulunuz. Eğer rank(X)=a ise hangi koşullar altında bu eşitliğin sağlandığını gösteriniz.

b. Parametrelerin keyfi olarak seçilen herhangi bir fonksiyonu

$$c\mu + d_1\alpha_1 + \dots + d_a\alpha_a + f\beta$$

olarak verilmişse, bu fonksiyonun tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter koşulu belirleyiniz.

c. $\beta, \mu + \alpha_1, \mu + \alpha_1 + \beta$ lineer fonksiyonlarının tahmin edilebilir olup olmadığını gösteriniz.

a.

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= \mu + \alpha_1 + \beta z_{11} + \varepsilon_{11} \\
 &\vdots \\
 y_{1n_1} &= \mu + \alpha_1 + \beta z_{1n_1} + \varepsilon_{1n_1} \\
 &\vdots \\
 y_{a1} &= \mu + \alpha_a + \beta z_{a1} + \varepsilon_{a1} \\
 &\vdots \\
 y_{an_a} &= \mu + \alpha_a + \beta z_{an_a} + \varepsilon_{an_a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ \vdots \\ y_{a1} \\ y_{a2} \\ \vdots \\ y_{an_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & z_{11} \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & z_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & z_{1n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & z_{a1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & z_{a2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & z_{an_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_a \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{a1} \\ \varepsilon_{a2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{an_a} \end{bmatrix}$$

Sütun 2 den a+1 e kadar olan sütunlar lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\text{rank}(X) \geq a$ dır. İlk sütun sonraki a sütunun toplamıdır. Bu yüzden $\text{rank}(X) = a$ veya $a+1$ dir. Eğer, $z_{1i} = \dots = z_{in_i}$, $i = 1 \dots a$ ise $z = (z_{11}, \dots, z_{an_a})'$ 2 den a+1 e kadar olan sütunların lineer birleşimi olarak ifade edilir. Bu durumda, $\text{rank}(X) = a$ dır. Eğer bu eşitlik sağlanmıyorsa $\text{rank}(X) = a+1$ dir.

b. Eğer $\text{rank}(X) = a+1$ ise

X matrisinin yokluk uzayı = X in sütun sayısı – $\text{rank}(X) = a+2-a-1=1$

yani $Xc=0$ olacak şekilde 1 tane c vektörü yazılabilir ve c vektörü

$$c = (1, -1, -1, \dots, -1, 0)'$$

olarak elde edilir.

$\lambda = (c, d_1, \dots, d_a, f)'$ olmak üzere $\lambda' \beta$ nın tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter koşul $\lambda' c = 0$ olmasıdır.

$$[c \ d_1 \ \dots \ d_a \ f] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow c = \sum_{i=1}^a d_i \text{ gerek ve yeter koşuldur.}$$

c. $\beta, \mu + \alpha_1, \mu + \alpha_1 + \beta$ lineer fonksiyonlarının tahmin edilebilir olup olmadığını gösterelim

β : $c = 0, d_1 = \dots = d_a = 0, f = 1$; gerek ve yeter koşul $c = \sum_{i=1}^a d_i$ yani $0=0$ olduğundan tahmin edilebilirdir.

$\mu + \alpha_1$: $c = 1, d_1 = 1, d_2 = \dots = d_a = 0, f = 0$; gerek ve yeter koşul $c = \sum_{i=1}^a d_i$ yani $1=1$ olduğundan tahmin edilebilirdir.

$\mu + \alpha_1 + \beta$: $c = 1, d_1 = 1, d_2 = \dots = d_a = 0, f = 1$; gerek ve yeter koşul

$c = \sum_{i=1}^a d_i$ yani $1=1$ olduğundan tahmin edilebilirdir.