FONKSİYONLAR

Sıralı İkili

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, $a \in A$ ve $b \in B$ iken (a, b) ifadesine bir "sıralı ikili" denir. Burada a'ya, sıralı ikilinin "birinci bileşeni", b'ye de "ikinci bileşeni" denir. Kümelerde elemanların yazılış sırası önemli olmamasına rağmen sıralı ikililerde yazılış sırası önemlidir.

(a, b) ile (c, d) iki sıralı ikili iken bunların eşit olabilmeleri için gerek ve yeter şart a=c ve b=d olmasıdır. Yani, iki sıralı ikilinin eşit olabilmesi için aynı sıradaki terimler eşit olmalıdır.

Örneğin, $(5,3) \neq (3,5)$'tir.

Örnek: **A**=$\{a,b,c\}$ ve B=$\{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere (a,2), (b,1) ve (c,1) birer sıralı ikilidir.

Örnek: (2x-2,y-3)=(10,-3) olduğuna göre x ve y sayılarını bulunuz.

çözüm: Sıralı ikililerin eşit olmaları için, aynı sıradaki terimler eşit olmalı idi. Buradan,

(2x-2,y-3)=(10,-3) $\Rightarrow$2x-2=10 ve y-3= -3 olmalıdır.

$\Rightarrow$x=6 ve y=0 olarak bulunur.

Kartezyen Çarpım

A ve B boş olmayan iki küme iken $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere, tüm (a, b) sıralı ikililerinin kümesine, A ve B kümelerinin "kartezyen çarpım kümesi" denir ve bu küme $A \times B$ ile gösterilir.

$$A \times B=\{(a,b): a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örneğin, $A=\{0,1,2\}$ ve $B=\{e,\Pi\}$ olsun. O zaman $A \times B$ kartezyen çarpım kümesi,

$$A \times B= \{(0,e), (0,\Pi), (1,e), (1, \Pi), (2, e), (2, \Pi)\}$$

olarak elde edilir.

NOT: $A\times B$ kümesinin eleman sayısı $s(A\times B)$ ile gösterilir.

$$s(A\times B)=s(A).s(B)$$

Örneğin, yukarıdaki örnekte verilen A ve B kümeleri için $A\times B$ kümesinin eleman sayısı; s(A)=3 ve s(B)=2 olduğundan, $s(A\times B)=s(A).s(B)=3.\ 2=6$ olarak bulunur.

Bağıntı

A ve B iki küme olsun. $A\times B$ 'nin herhangi bir C alt kümesine A'dan B'ye bir "bağıntı" denir.

Örnek: $A=\{0,1,2\}$ ve $B=\{e,\Pi\}$ iken $C=\{(1,\Pi),(2,e)\}$ kümesi, $A\times B$ 'nin bir alt kümesi olup C, A'dan B'ye bir bağıntıdır.

NOT: A ve B herhangi iki küme ve s(A)=m, s(B)=n olsun.

$$s(A\times B)=m.\ n \Rightarrow A\times B \text{'nin alt küme sayısı } 2^{m.n} \text{'dir.}$$

A'dan B'ye bir bağıntı $A\times B$ 'nin herhangi bir alt kümesi olduğuna göre, A'dan B'ye yazılabilecek tüm bağıntıların sayısı $2^{m.n}$ 'dir. Benzer şekilde, B'den A'ya yazılabilecek tüm bağıntıların sayısı da $2^{m.n}$ 'dir.

Örnek: $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{1,2,3,4\}$ kümelerini ele alalım. S(A)=3 ve s(B)=4 olduğundan;

A'dan B'ye olan tüm bağıntıların sayısı: $2^{3.4}=2^{12}=4096$

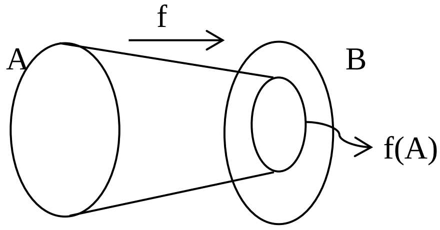
A'dan A'ya olan tüm bağıntıların sayısı: $2^{3.3}=2^{9}=512$ 'dir.

Fonksiyon

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her elemanını, B'nin yalnızca bir elemanına eşleyen bağıntıya A'dan B'ye bir "fonksiyon" denir ve

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow y=f(x)$$

şeklinde gösterilir. $f=\{(x,f(x)):x\in A\}$' dır.



$f(A)\subset B$

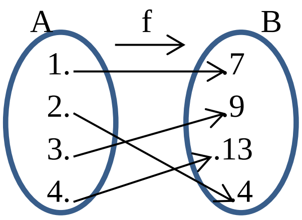
Burada x’ e “bağımsız değişken”, y’ye de “bağımlı değişken” denir. A kümesine f fonksiyonunun “tanım kümesi”, f(A)’ya da f fonksiyonunun değer(görüntü) kümesi” denir.

Uyarı: Her bağıntı bir fonksiyon değildir. Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için:

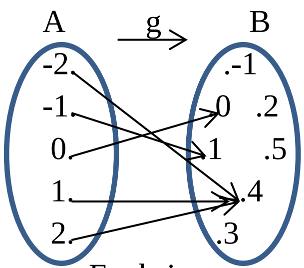
1)Tanım kümesinde açıkta eleman kalmamalıdır (Değer kümesinde açıkta eleman olabilir).

2)Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü yalnız bir tane olmalıdır.

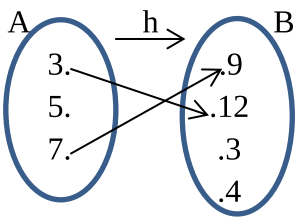
Örnek:



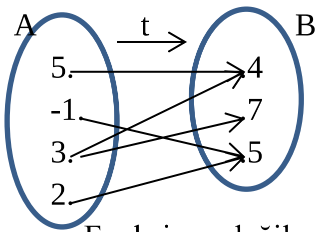
Fonksiyon



Fonksiyon



Fonksiyon değil



Fonksiyon değil

Örnek: $A=\{2,4,6\}$ ve $B=\{2,6,10,14,18\}$ kümeleri veriliyor.

$$f:A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y=f(x)=2x-2$$

fonksiyonuna göre A tanım kümesindeki elemanların görüntülerini bulunuz

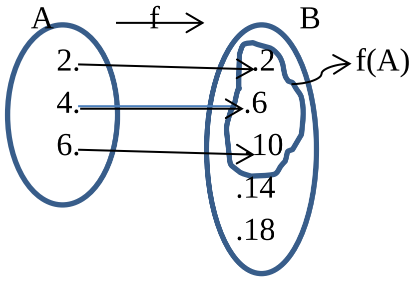
çözüm: $A=\{2,4,6\}$ ve f(x)=2x-2 olduğuna göre:

x=2 için: f(2)=2.2-2=2

x=4 için: f(4)=2.4-2=6

x=6 için: f(6)=2.6-2=10

bulunur. O halde, f(A)= $\{2,6,10\}$ ve f=$\{(2,2),(4,6),(6,10)\}$ bulunur.



Örnek: f: A$\rightarrow$ B, f(x)= 3x+4 fonksiyonunun değer kümesi B=$\{-8,-5,-2\}$ olduğuna göre f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

çözüm: B=$\{-8,-5,-2\}$ ve f(x)= 3x+4 olduğuna göre;

f(x)=3x+4= -8 $\Rightarrow$ 3x= -12$\Rightarrow$x= -4

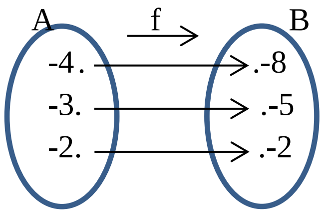
f(x)=3x+4= -5$\Rightarrow$3x= -9$\Rightarrow$x= -3

f(x)=3x+4= -2$\Rightarrow$3x= -6$\Rightarrow$x= -2 bulunur. Buradan f fonksiyonunun tanım kümesi:

A= $\{-4,-3,-2\}$

olarak elde edilir. Buradan da,

f=$\{(-4,-8),(-3,-5),(-2,-2)\}$ ve

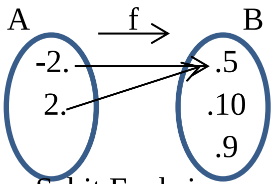


olduğu görülür.

Fonksiyon Çeşitleri:

1)Sabit Fonksiyon: f: $A \rightarrow B$ fonksiyonu, her $x \in A$ için B kümesinden bir sabiti gösteriyorsa bu f fonksiyonuna "sabit fonksiyon" denir.

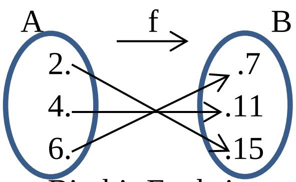
Örnek:



Sabit Fonksiyon

2)Birebir Fonksiyon: A'dan B'ye tanımlı bir f fonksiyonunda A'nın farklı elemanlarının görüntüleri de farklı ise, bu fonksiyona "birebir fonksiyon" denir.

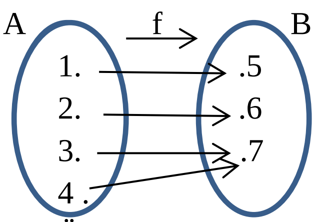
Örnek:



Birebir Fonksiyon

3)Örten Fonksiyon: A'dan B'ye tanımlı bir f fonksiyonunda A tanım kümesindeki her eleman B kümesindeki bütün elemanlarla, B'nin hiçbir elemanı açıkta kalmayacak şekilde eşleşiyorsa f fonksiyonuna A'dan B'ye "örten fonksiyon" denir.

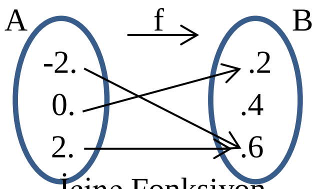
Örnek:



Örten Fonksiyon

4)İçine Fonksiyon: A'dan B'ye tanımlı bir f fonksiyonunda A tanım kümesindeki her eleman B kümesinde <u>en az</u> bir eleman açıkta kalacak şekilde B'nin elemanları ile eşleşiyorsa f fonksiyonuna A'dan B'ye "içine fonksiyon" denir.

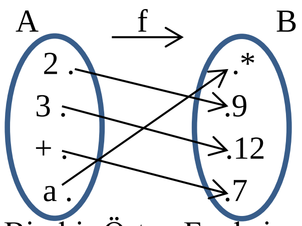
Örnek:



İçine Fonksiyon

5)Birebir Örten Fonksiyon: A’dan B’ye f fonksiyonunda A’nın farklı elemanlarının görüntüleri farklı ise ve B’nin her elemanı A’nın bir elemanı ile eşleşiyorsa, yani B’de açıkta eleman kalmamışsa, f fonksiyonuna “birebir ve örten fonksiyon” denir.

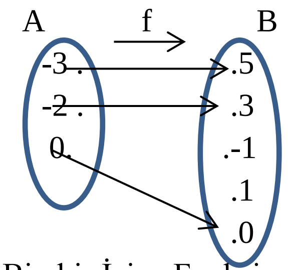
Örnek:



Birebir Örten Fonksiyon

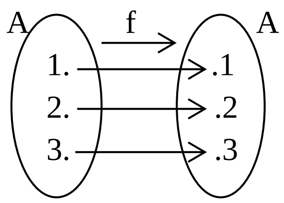
6)Birebir İçine Fonksiyon: A’dan B’ye bir f fonksiyonunda A’nın farklı elemanlarının görüntüleri farklı ve B değer kümesinin en az bir elemanı açıkta kalıyor ise, f fonksiyonuna A’dan B’ye “birebir içine fonksiyon” denir.

Örnek:



Birebir İçine Fonksiyon

7) Birim Fonksiyon: A’ dan A’ ya tanımlı bir f fonksiyonunda her $x \in A$ için f(x)=x oluyorsa, f fonksiyonuna “özdeşlik” veya “birim fonksiyon” denir. I_A ile gösterilir.



Birim Fonksiyon

Fonksiyonlarda Dört İşlem

f ve g fonksiyonlarının her ikisinin tanım kümesi içinde olan x değerleri için:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(f.\,g)(x)=f(x).g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ olarak tanımlanır.

Örnek: $f: R \to R$, $x \to f(x)=2x-3$, $g: R \to R$, $x \to g(x)= x^2+1$ fonksiyonları veriliyor.

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x-3+x^2+1=x^2+2x-2$

b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)= (2x-3)-(x^2+1)= -x^2+2x-4$

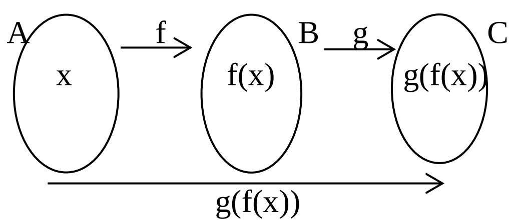
c) $(f.g)(x)=f(x).g(x)= (2x-3).(x^2+1)=2x^3-3x^2+2x-3$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-3}{x^2+1}$, $x^2+1\neq 0$

Fonksiyonların Bileşkesi

f: $A\to B$, g: $B\to C$ fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları yardımı ile A'dan C'ye tanımlanan gof: $A\to C$ fonksiyonuna f ile g fonksiyonlarının "bileşkesi" denir ve f ile g fonksiyonlarının bileşkesi olan fonksiyon gof ile gösterilir(gof; "g bileşke f" diye okunur).

gof: $A \to C$
$x\to (gof)(x)=g(f(x))$



Uyarı: (gof)(x) $\neq$ (fog)(x)' tir.

Örnek: f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$ olmak üzere f(x)=4x+3, g(x)= x^2-2 fonksiyonları veriliyor.

a)(fog)(x)=? b)(gof)(x)=? c)(fog)(2)=? d)(gof)(2)=?

çözüm:

a)(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=4(x^2-2)+3= 4 x^2-5

b)(gof)(x)=g(f(x))=g(4x+3)=(4 x^2+3) ^{2} -2=16x^2+24x+7

c)1.yol: (fog)(2)=f(g(2))=f(2^2-2)=f(2)=4.2+3=11 bulunur.

2. yol: (a) şıkkında (fog)(x)= 4 x^2-5 bulmuştuk. Buradan, (fog)(2)'yi bulmak için (fog)(x)'in eşiti olan ifadede x yerine 2 yazabiliriz:

(fog)(2)= 4. 2^2 -5=11 elde edilir.

d)1.yol:(gof)(2)=g(f(2))=g(4.2+3)=g(11)= $11^2-2=119$ bulunur.

2.yol: (b) şıkkında (gof)(x)= 16x^2+24x+7 bulmuştuk. Buradan,

(gof)(2)= 16.2^2+24.2+7=119 olarak elde edilir.

Ters Fonksiyon

f fonksiyonu birebir örten fonksiyon ise öyle bir g fonksiyonu tanımlanabilir ki;

(gof)(x)=(fog)(x)

dir. Bu eşitlikteki g fonksiyonuna f'nin "ters fonksiyonu" denir ve f^{-1} ile gösterilir.

($f^{-1}$of)(x)=(fo f^{-1})(x)=I(x)=x

Örnek: $f(x)=2x+5$ ve $g(x)=\frac{1}{2}(x-5)$ ise, g fonksiyonu f fonksiyonunun tersidir. Çünkü;

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(2x+5)=\frac{1}{2}\left[(2x+5)-5\right]=\frac{1}{2}.2x=x$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{2}(x-5)\right)=2\left[\frac{1}{2}(x-5)\right]+5=x-5+5=x \text{ olur.}$$

Uyarı:

*f fonksiyonunun tersinin olması için gerek ve yeter koşul f'nin birebir ve örten olmasıdır.

*Bir fonksiyonun tersi varsa bu tektir.

*f 'nin tersi olan f^{-1} ile $\frac{1}{f(x)}$ karıştırılmamalıdır. Ters fonksiyonun tanımından f'nin değer kümesinin , f^{-1}'in tanım kümesi olduğu açıktır.

Örnek: $f(x)=4x-3$ ise $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

çözüm: $f(x)=4x-3$ ifadesinde x yerine $f^{-1}(x)$ yazarsak;

$$f(f^{-1}(x))=4.f^{-1}(x)-3$$

$$x=4.\ f^{-1}(x)-3$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{4}$$ olarak bulunur.