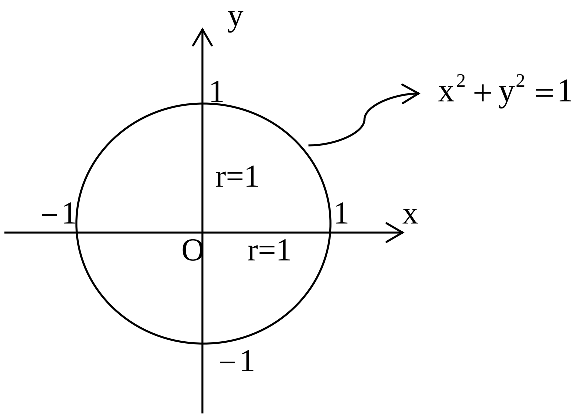
TRİGONOMETRİ

Birim Çember: Analitik düzlemde, merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çembere "birim çember" denir. Birim çemberin denklemi,

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

şeklindedir.

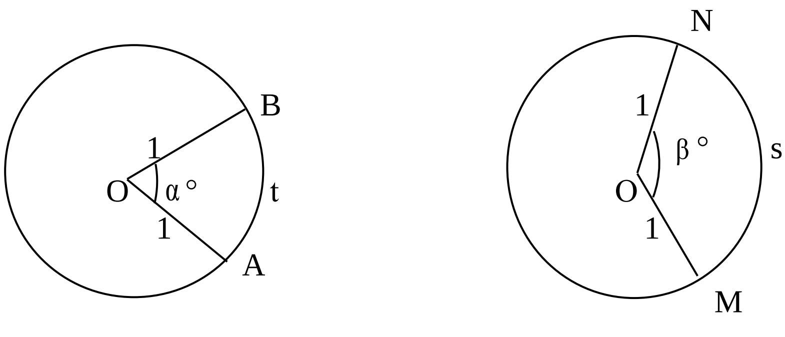


Açı Ölçü Birimleri

Açı ölçü birimlerinden biri derecedir. 1 derece (1°), bir çemberin merkez açısının tamamının ölçüsünün 360 ta biridir.

Dereceden başka açı ölçü birimleri de vardır.

Yarıçapı 1 birim olan çemberi göz önüne alalım. Bu çemberde her bir merkez açıya bir çember yayı uzunluğu karşılık gelir.



Yukarıdaki şekillerde ölçüsü $\alpha°$ olan $A\hat{O}B$' na, uzunluğu t birim olan bir AB yayı ve ölçüsü $\beta°$ olan MON açısına, uzunluğu s birim olan bir MN yayı karşılık gelmektedir.

Ölçüsü 360° olan açıya da 2π uzunluğunda bir yay karşılık gelir.

Birim çemberde verilen bir açıya karşılık gelen yayın uzunluğuna o açının "radyan" olarak ölçüsü denir. Buna göre,

$$\boxed{360 \text{ derece} = 2\pi \text{ radyan}}$$

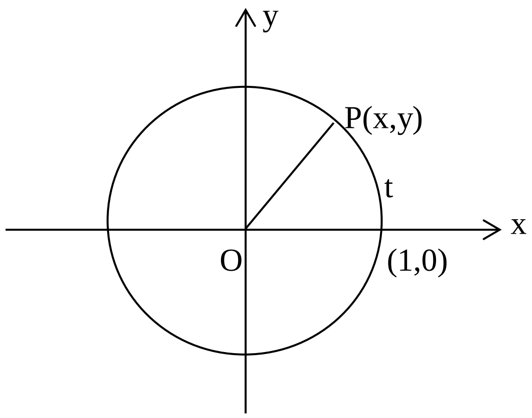
olacaktır. Bu eşitlikten yararlanarak, derece cinsinden verilen tüm ölçüler radyan, radyan cinsinden verilen tüm ölçüler derece cinsinden yazılabilir.

Dersimizle ilgili en çok kullanılan derece ve bunlara karşılık gelen radyan değerleri liste halinde aşağıda verilmiştir:

Derece	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radyan	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Trigonometrik Fonksiyonlar

Analitik düzlemde çizdiğimiz birim çember üzerinde (1,0) noktasından başlayıp saat yönünün tersi yönde t birim ilerlersek çember üzerinde bir P(x, y) noktası elde ederiz. P noktasının apsisi cos t (kosinüs t), ordinatı sin t (sinüs t) olarak tanımlanır. Böylece her bir t sayısına bir cos t ve bir sin t sayısı karşılık gelir.



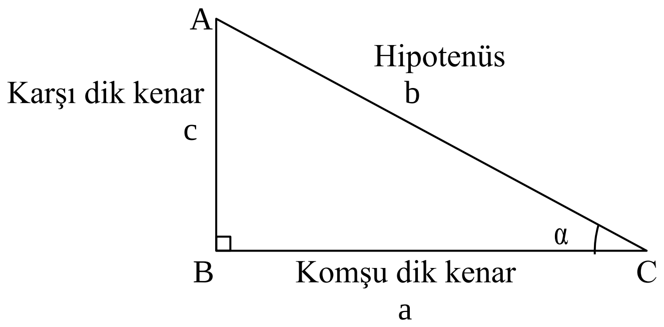
$$\left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow P(x,y)=P(\cos t, \sin t)$$

Yukarıdaki şekilden görüleceği gibi, $-1 \leq \cos t \leq 1$, $-1 \leq \sin t \leq 1$ dir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarından başka en çok kullanılan diğer trigonometrik fonksiyonlar tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant fonksiyonlarıdır. Bunlar,

$$\boxed{\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}} \quad , \quad \boxed{\cot t=\frac{\cos t}{\sin t}} \quad , \quad \boxed{\sec t=\frac{1}{\cos t}} \quad , \quad \boxed{\csc t=\frac{1}{\sin t}}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Dar Açıların Trigonometrik Oranları



$\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninde α dar açısının trigonometrik oranları:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

Trigonometrik Özdeşlikler

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\tan\alpha \,.\, \cot\alpha = 1$

3) $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

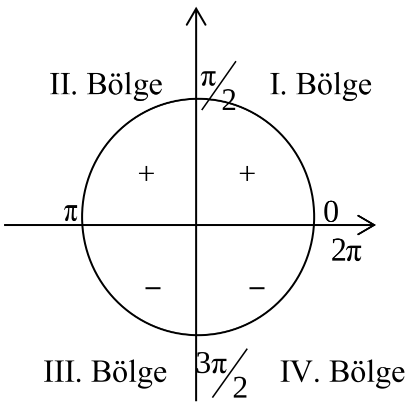
4) $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

5) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

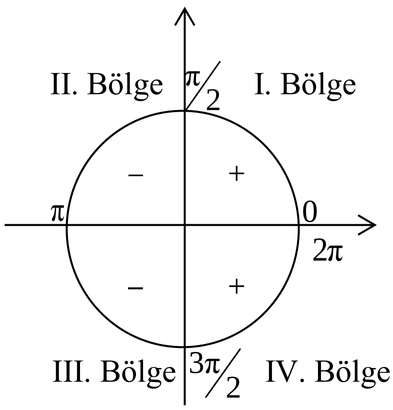
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

6) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

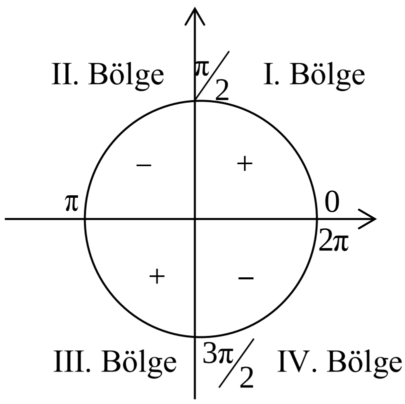
7)



Sinüs Fonksiyonu



Kosinüs Fonksiyonu



Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonu

8) Tümler (toplamları 90° olan) iki açıdan birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına, birinin sekantı diğerinin kosekantına eşittir.

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = \cot\beta \quad , \quad \sec\alpha = \csc\beta$$

9)

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız	0	Tanımsız	0
$\cot\alpha$	Tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Tanımsız	0	Tanımsız

Örnek: $\sin\ 30° = \cos\ 60° = \dfrac{1}{2}$

$$\sin\ 45° = \cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 60° = \cot\ 30° = \sqrt{3}$$

$$\sec\ 30° = \csc\ 60° = \frac{1}{\sin\ 60°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Örnek: $\dfrac{\sin\ 50°}{\cos\ 40°} = \dfrac{\cos\ 40°}{\cos\ 40°} = 1$

Örnek: $\cos^2 40° + \cos^2 50° = \sin^2 50° + \cos^2 50° = 1$

Örnek: $\tan\ 40°\ .\ \tan 50° = \tan 40°\ .\ \cot 40° = 1$

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri en sade biçimde yazınız.

a) $(1-\sin x).(1+\sin x) = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$

b) $\sin^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x = \sin^2 x.\sin^2 x + \sin^2 x.\cos^2 x$

$$= \sin^2 x \underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}$$

$$= \sin^2 x \quad . \quad 1$$

$$= \sin^2 x$$

c) $1+\tan^2 x = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2$

$$= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x$$

d) $$\frac{1+\cot x}{1+\tan x}=\frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}.\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\cot x$$

e) $$\frac{\sin x}{\csc x}+\frac{\cos x}{\sec x}=\frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}}+\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}}=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$