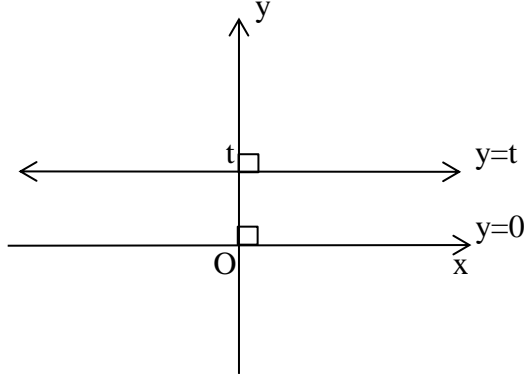


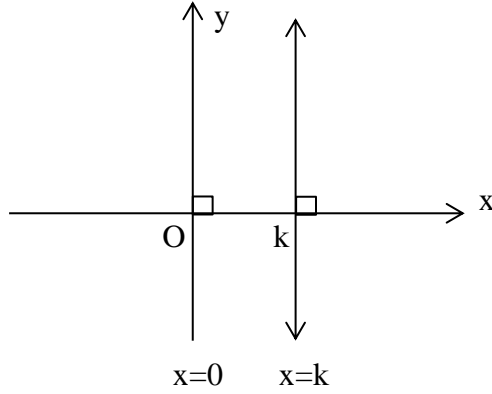
4) Özel Doğrular

a) Eksenlere Paralel Doğrular

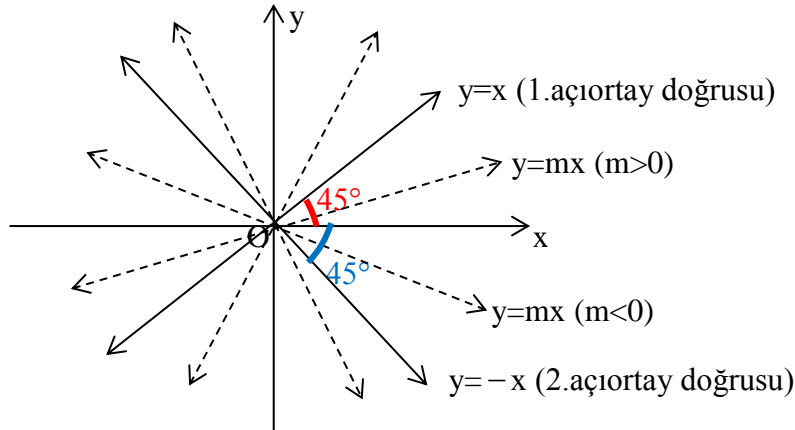
x eksenine paralel doğruların denklemi, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y=t$ biçimindedir. Eğimleri sıfırdır. $y=0$ doğrusu ise x eksenini belirtir.



y eksenine paralel doğruların denklemi, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x=k$ biçimindedir. Eğimleri tanımsızdır. $x=0$ doğrusu ise y eksenini belirtir.



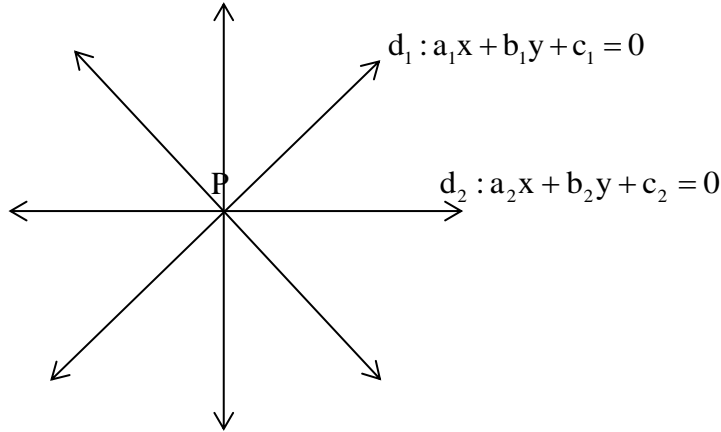
b) Başlangıç Noktasından Geçen Doğrular



Başlangıç noktasından (orijinden) geçen doğruların denklemi $y=mx$ biçimindedir.

5) Doğru Demeti

Denklemleri $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ olan iki doğrunun kesim noktasından geçen doğruların tümüne “doğru demeti” denir.



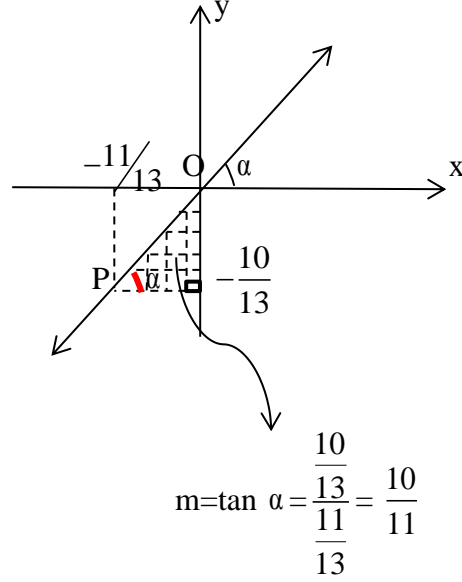
Şekilden görüldüğü gibi; d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası $P(x_1, y_1)$ ise, P noktası her iki doğrunun üzerinde bulunduğundan koordinatları her iki doğru denklemini de sağlar.

Örnek: $2x + 3y + 4 = 0$ ve $x - 5y - 3 = 0$ doğrularının kesim noktası ile başlangıç noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: İki doğrunun kesim noktası, doğru denklemlerinin ortak çözümleri ile bulunur:

$$\begin{array}{lcl}
 d_1 \dots\dots\dots 2x+3y+4=0 & \longrightarrow & 2x+3y=-4 \longrightarrow 2x+3\left(-\frac{10}{13}\right)=-4 \\
 d_2 \dots\dots\dots x-5y-3=0 & \longrightarrow & -2/x-5y=3 & 2x-\frac{30}{13}=-4 \\
 & & \hline & & 2x=-4+\frac{30}{13} \\
 & & 2x+3y=-4 & 2x=\frac{-52+30}{13} \\
 & & \hline & & 2x=-\frac{22}{13} \\
 & & -2x+10y=-6 & 2x=-\frac{11}{13} \\
 & & \hline & & 13y=-10 \\
 & & & & y=-\frac{10}{13} \\
 & & & & x=-\frac{11}{13}
 \end{array}$$

O halde, d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası $P(-\frac{11}{13}, -\frac{10}{13})$ tür. $(-\frac{11}{13}, -\frac{10}{13})$ ve $O(0,0)$ noktalarından geçen doğru denklemi $y=mx$ şeklindedir.



$$y=mx = \frac{10}{11}x \Rightarrow y = \frac{10}{11}x \text{ aradığımız doğru denklemdir.}$$

Örnek: $A(-3,3)$, $B(a,5)$ ve $C(-8,4)$ noktalarından C noktası, AB doğrusu üzerinde ise a kaçtır?

Çözüm:

1.yol: AB doğrusunun denklemini yazarsak:

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{y - 3}{3 - 5} = \frac{x + 3}{-3 - a}$$

$$AB \dots\dots\dots \frac{y - 3}{-2} = \frac{x + 3}{-3 - a}$$

C noktası, AB doğrusu üzerinde ise, C noktasının koordinatları AB doğrusunun denklemini sağlamalıdır:

$$C(-8,4) \rightarrow \frac{4 - 3}{-2} = \frac{-8 + 3}{-3 - a}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{-5}{-3-a}$$

$$3 + a = -10$$

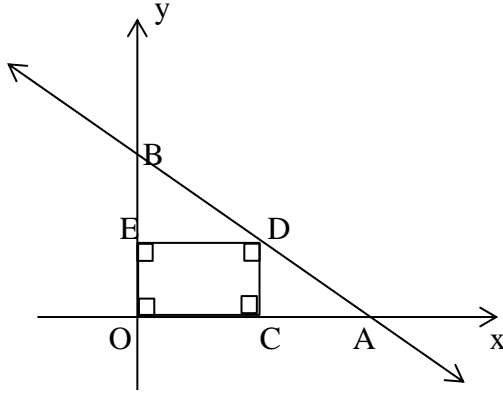
$a = -13$ bulunur.

2.yol: C noktası, AB doğrusu üzerinde ise, A, B ve C noktaları doğrusaldır. Aynı doğru üzerinde bulunan noktalarla oluşturulan doğruların eğimleri eşit olduğundan:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC} \text{ dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_{AB} = \frac{5-3}{a+3} = \frac{2}{a+3} \\ m_{AC} = \frac{4-3}{-8+3} = -\frac{1}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a+3} = -\frac{1}{5} \Rightarrow a+3 = -10 \Rightarrow a = -13 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

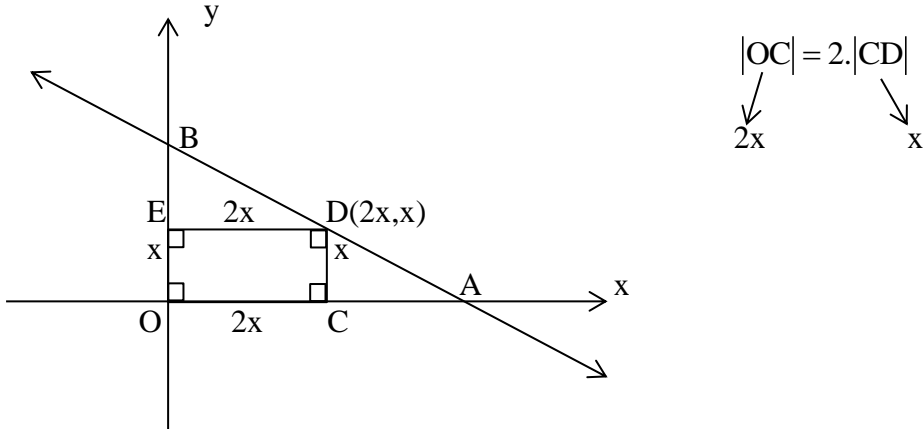


Yukarıdaki şekilde $A(8,0)$, $B(0,12)$ noktaları ile OCDE dikdörtgeni veriliyor.

$$|OC| = 2 \cdot |CD|$$

olduğuna göre D noktasının koordinatları nedir?

Çözüm:



AB doğrusu $\frac{y-0}{0-12} = \frac{x-8}{8-0}$

$$\frac{y}{-12} = \frac{x-8}{8}$$

$$2y = -3x + 24$$

$$3x + 2y - 24 = 0$$

D noktası, AB doğrusu üzerinde ise:

$$D(2x, x) \Rightarrow 3 \cdot 2x + 2x - 24 = 0$$

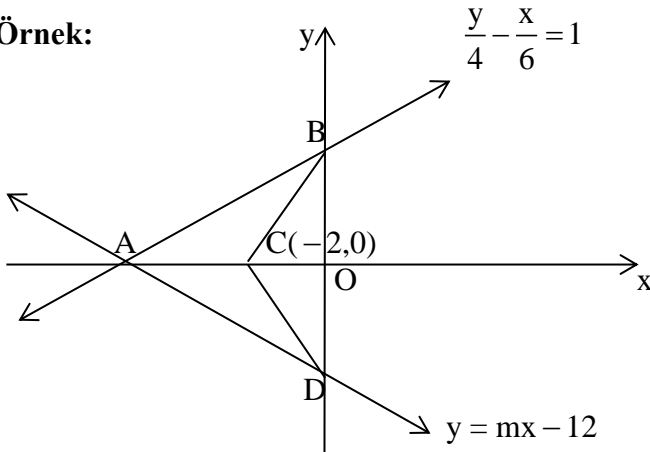
$$6x + 2x - 24 = 0$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

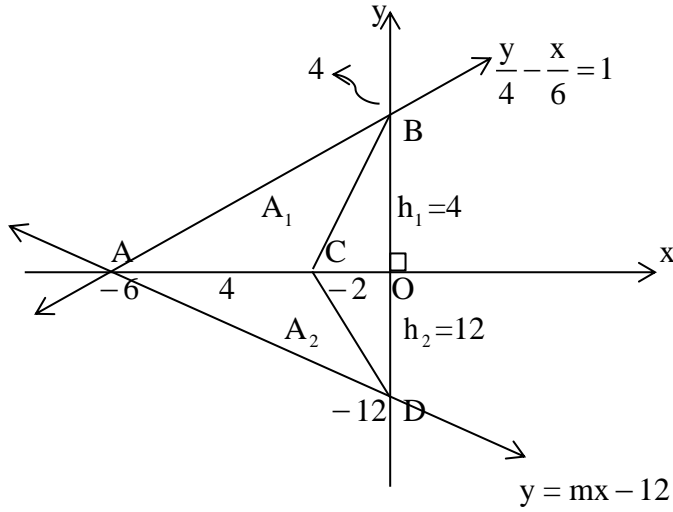
$D(2x, x) = D(2 \cdot 3, 3) = D(6, 3)$ bulunur.

Örnek:



Şekildeki taralı alan kaç birim karedir?

çözüm:



$$y = mx - 12$$

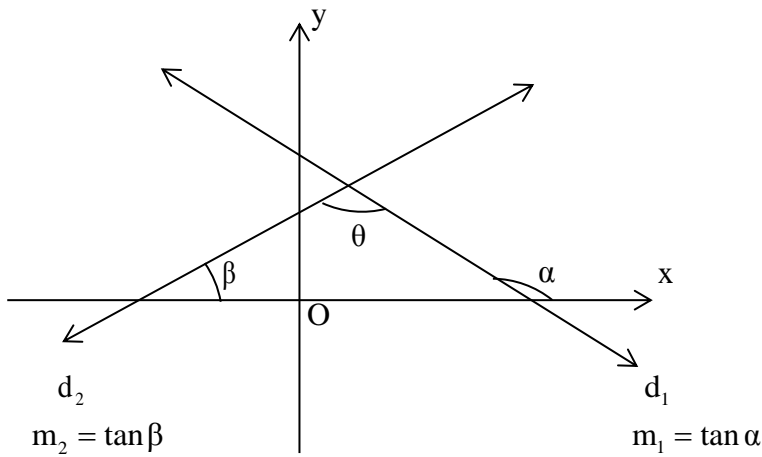
$$A(ABCD) = A_1 + A_2$$

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow y = m \cdot 0 - 12 \\ &y = -12 \end{aligned}$$

$$= A(\triangle ABC) + A(\triangle ACD)$$

$$= \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 12}{2} = 8 + 24 = 32 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

İki Doğru Arasındaki Aç



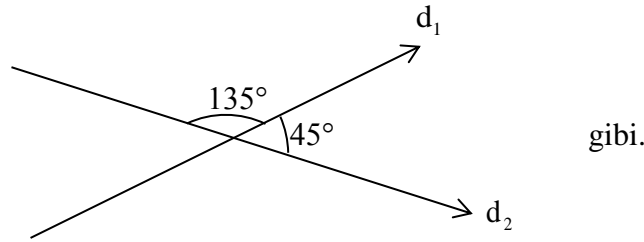
Eğimleri m_1 ve m_2 olan d_1 ve d_2 doğruları arasındaki açı θ olsun.

$$\boxed{\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}} \text{ dir.}$$

NOT: 1) $\tan \theta > 0 \Rightarrow$ Doğrular arasındaki açı dar açıdır.

2) $\tan \theta < 0 \Rightarrow$ Doğrular arasındaki açı geniş açıdır.

3) θ , iki doğru arasındaki açı ise $0^\circ < \theta < 180^\circ$ dir. İki doğru arasındaki açı denildiği zaman bütünler iki açı, yani doğrusal çift düşünülmalıdır. Örneğin,



Örnek: $2x - y - 3 = 0$ ve $3x + y + 7 = 0$ doğruları arasındaki dar açının ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm:

$$d_1 \dots\dots\dots 2x - y - 3 = 0 \longrightarrow y = 2x - 3 \longrightarrow m_1 = 2$$

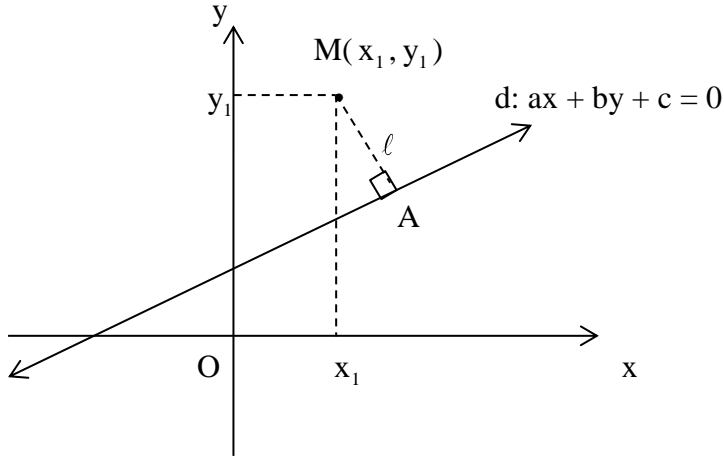
$$d_2 \dots\dots\dots 3x + y + 7 = 0 \longrightarrow y = -3x - 7 \longrightarrow m_2 = -3$$

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\tan \theta = -1 \Rightarrow \theta = 135^\circ$$

Dar açı sorulduğuna göre: $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ bulunur.

Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı



$M(x_1, y_1)$ noktasının, denklemi $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı, M den d doğrusuna inilen MA dikme uzunluğudur.

$$\ell = |MA| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ile hesaplanır.}$$

Örnek: $P(2, -1)$ noktasının $6x + 8y + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığının 5 birim olması için c nin alabileceği değerler toplamı nedir?

Çözüm:
$$5 = \frac{|6 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + c|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|12 - 8 + c|}{\sqrt{100}} = \frac{|4 + c|}{10}$$

$$\frac{|4 + c|}{10} = 5$$

$$|4 + c| = 50$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ 4 + c = 50 \quad 4 + c = -50 \\ c = 46 \quad c = -54 \end{array}$$

$$c = 46 \quad c = -54 \quad \Rightarrow \quad 46 + (-54) = -8 \text{ bulunur.}$$

NOT:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right\} \text{doğru denklemlerinde:}$$

$$\text{a) } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow d_1 \text{ ve } d_2 \text{ çakışık.}$$

$$\text{b) } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow d_1 \text{ ve } d_2 \text{ paraleldir.}$$

$$\text{c) } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow d_1 \text{ ve } d_2 \text{ tek noktada kesişirler. } d_1 \text{ ve } d_2 \text{ doğrularının kesim noktaları,}$$

doğru denklemlerinin ortak çözümüdür.

Örnek:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - (m+2)y - 4 = 0 \\ x + 2y - n + 3 = 0 \end{array} \right\} \text{denklemleri aynı doğruyu gösteriyorsa (m, n) nedir?}$$

Çözüm: Çakışık olan doğrular, aynı doğruyu gösterir. Buradan,

$$\frac{2}{1} = \frac{-m-2}{2} = \frac{-4}{-n+3} \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{-m-2}{2} = 2$$

$$\frac{-4}{-n+3} = 2$$

$$-m-2=4$$

$$-2n+6=-4$$

$$m = -6$$

$$2n = 10$$

$$n = 5$$

O halde, (m, n)=(-6, 5) olarak bulunmuş olur.

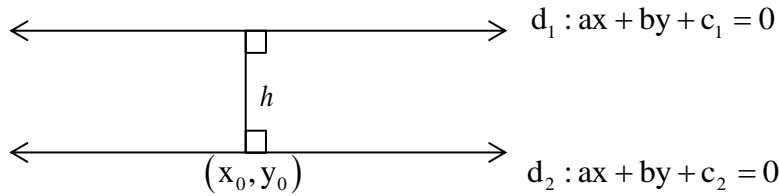
Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ Doğrular paralel idi. Yani paralel iki doğrunun denklemi:

$$d_1 : ax + by + c_1 = 0$$

$$d_2 : ax + by + c_2 = 0$$

biçimindedir. Doğru denklemleri ilk verildiğinde a ve b değerleri eşit olmayabilir. Ancak genişletme veya sadeleştirme yöntemleriyle a ve b nin aynı olması sağlanır. Bu durumda, sadece sabitler farklıdır.



$$h = |d_1 d_2| = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Örnek: $\left. \begin{array}{l} 3x - 4y + 21 = 0 \\ 2mx + 8y + m + 1 = 0 \end{array} \right\}$ paralel doğruları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Çözüm: Doğrular paralel ise: $\frac{3}{2m} = \frac{-4}{8}$ yazılabilir.

$$-8m = 24$$

$$m = -3$$

Buradan doğru denklemleri:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \dots\dots\dots 3x - 4y + 21 = 0 \\ d_2 \dots\dots\dots -6x + 8y - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

olur. x ve y ' nin katsayıları eşitlenirse (2. denklemden katsayılar -2 ye bölünerek eşitleme yapılabilir):

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \dots\dots\dots 3x - 4y + 21 = 0 \\ d_2 \dots\dots\dots 3x - 4y + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla, d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklık:

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|21 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ br bulunur.}$$

-----0-----