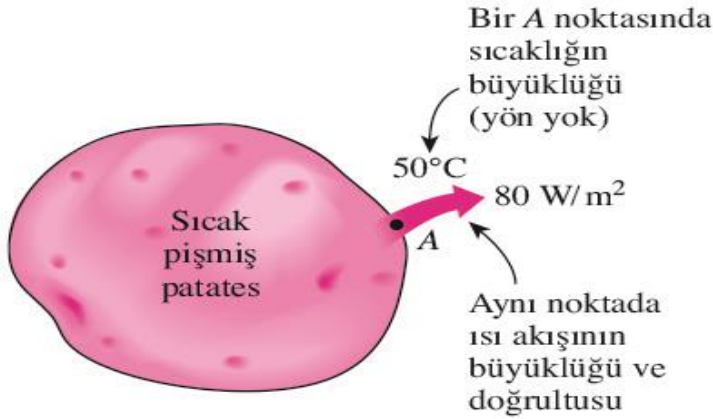


3. HAFTA
ISI İLETİM DENKLEMİ

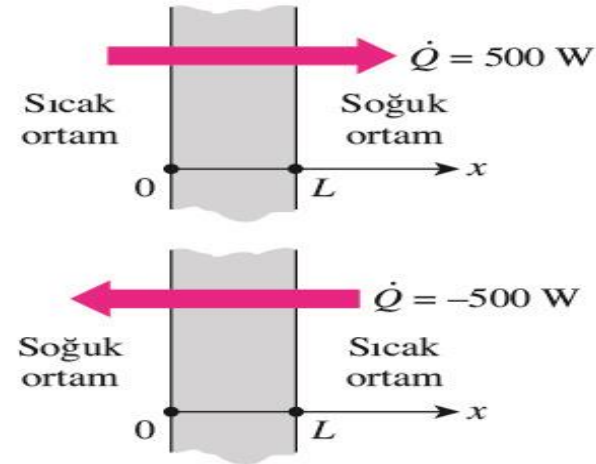
Giriş

- Birbiriyle yakın ilişkili kavramlar olmalarına rağmen ısı transfer ve sıcaklığın nitelikleri farklıdır.
- **Sıcaklıktan** farklı olarak ısı transferi, hem bir büyüklüğe hem de yöne sahiptir ve dolayısıyla **vektörel** bir büyüklüktür.
- Bu tür sorulardan kaçınmak için bir koordinat sistemi ile çalışılabilir ve yön negatif veya pozitif işaretlerle gösterilebilir.



ŞEKİL 2-1

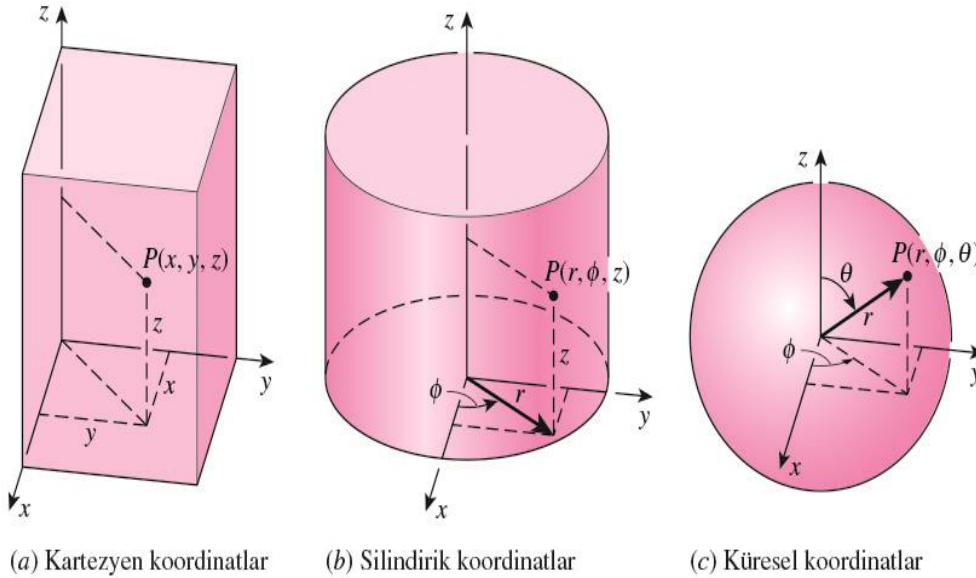
Isı transferinin, hem büyüklüğü hem de bir doğrultusu vardır ve dolayısıyla *vektörel* bir niceliktir.



ŞEKİL 2-2

Isı transferi için yön gösterimi (pozitif yönde pozitif; negatif yönde negatif)

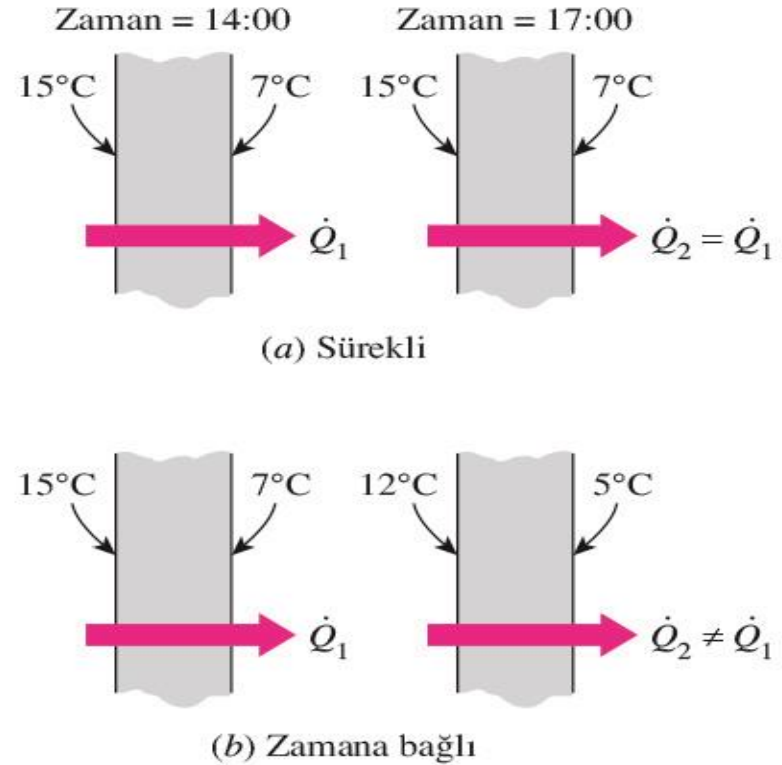
- **Isı transferinin** herhangi bir türü için itici güç sıcaklık farkıdır.
- Sıcaklık farkı ne kadar büyükse ısı transfer hızı da o kadar büyük olur.
- Kartezyen $T(x, y, z, t)$
- Silindirik $T(r, \phi, z, t)$
- Küresel $T(r, \phi, \theta, t)$ olmak üzere 3 temel koordinat sistemi kullanılabilir.



ŞEKİL 2-3
Farklı koordinat sistemlerinde bir noktanın konumu tanımlandığı zaman, içerdiği çeşitli uzaklık ve açılar.

Sürekli ve Zamana Bağlı Isı Transferi

- **Sürekli terimi**, ortam içindeki herhangi bir noktada zamanla değişimin olmadığına işaret ederken,
- **Zamana bağlı** ifadesi zamanla değişimi veya zaman bağımlılığını ifade eder.
- Zamana göre değişimin olduğu, fakat konuma göre değişimin olmadığı özel durumda, ortam sıcaklığı zamanla üniform olarak değişir. Bu tür ısı transfer sistemleri **yığık sistemler** olarak adlandırılır.



ŞEKİL 2-4

Bir düzlem duvarda sürekli ve zamana bağlı ısı iletimi.

Çok Boyutlu Isı Transferi

- Isı transfer problemleri, farklı doğrultulardaki ısı transfer hızının birbirlerine göre büyüklüğüne ve istenen duyarlık düzeyine bağlı olarak
 - ✓ Tek boyutlu
 - ✓ İki boyutlu
 - ✓ Üç boyutlu olarak sınıflandırılır.
- Bir ortamdaki ısı transferi en genel haliyle **üç boyutludur**. Bununla birlikte, bazı problemler, farklı yönlerde ısı transfer oranlarının göreceli büyüklüklerine ve istenen doğruluk seviyesine bağlı olarak iki veya bir boyutlu olarak sınıflandırılabilir.
- Eğer bir ortamdaki sıcaklık yalnız bir doğrultuda değişiyor ve dolayısıyla ısı bir doğrultuda transfer ediliyorsa, diğer doğrultulardaki sıcaklık değişimi ve dolayısıyla ısı transferi ihmal edilebilir veya sıfır ise, bu ısı transfer problemi **tek boyutlu** olarak adlandırılır.
- Bir ortamda sıcaklık iki esas doğrultuda değişebilir ve üçüncü doğrultudaki sıcaklık değişimi (ve dolayısıyla bu yöndeki ısı transferi) ihmal edilebilir. Bu durumdaki ısı transfer problemi **iki boyutlu** olarak anılır.

- Bir ortamda belirli bir doğrultuda (mesela x doğrultusu) ısı transfer hızı, ortam içindeki sıcaklık farkı ve ısı transfer doğrultusuna dik alan ile doğru, o doğrultudaki uzaklıkta ters orantılıdır. Bu durum diferansiyel biçimde **Fourier ısı iletimi kanunu** ifade edilir:

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (\text{W})$$

Isı azalan sıcaklık yönünde iletilir ve dolayısıyla ısı pozitif **x**- yönünde iletildiğinde, sıcaklık gradyanı negatiftir.

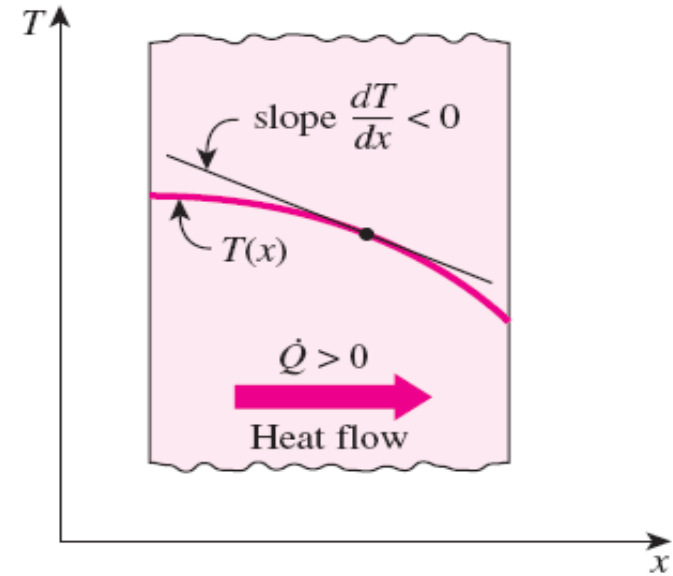


FIGURE 2-7

The temperature gradient dT/dx is simply the slope of the temperature curve on a T - x diagram.

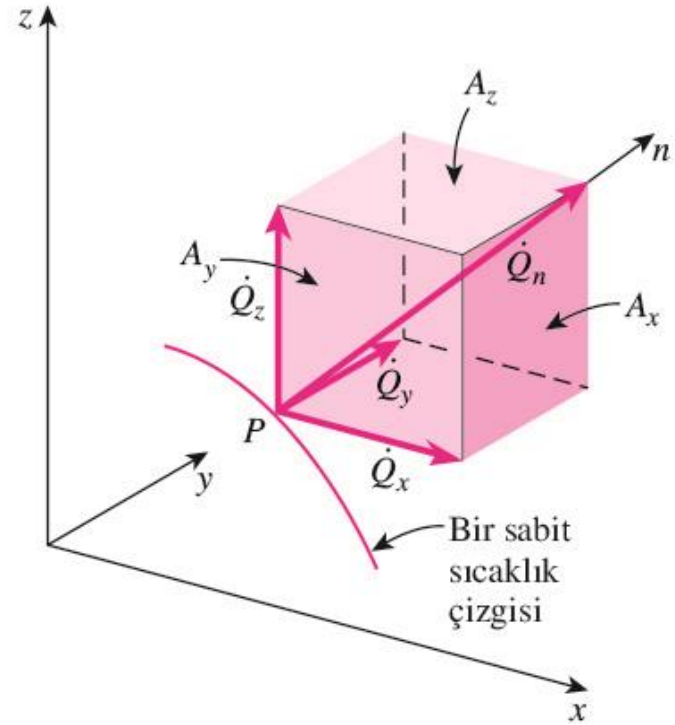
- Yüzeyde herhangi bir **P** noktasındaki ısı akısı vektörü yüzeye dik olmalıdır ve bu azalan sıcaklık yönünü göstermelidir.
- Eğer **n**, **P** noktasında sabit sıcaklık yüzeyinin normali ise, bu noktadaki ısı iletim hızı **Fourier kanunu** yardımıyla tanımlanır:

$$\dot{Q}_n = -kA \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{W})$$

$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

$$\dot{Q}_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dot{Q}_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\dot{Q}_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z}$$



ŞEKİL 2-8

Isı transferi vektörü daima sabit sıcaklık yüzeyine diktir ve herhangi bir vektör gibi bileşenlerine ayrılabilir.

Isı Üretimi

- Mesela,
 - ✓ Elektrik kablosundan akım geçtiği zaman direnç telinin sıcaklığı hızla artar ve bunun sonucu olarak elektrik enerjisi I^2R hızıyla ısıya dönüşür.
 - ✓ Nükleer reaktörlerin yakıt elemanlarında, nükleer güç santralleri için bir ısı kaynağı işlevi gören nükleer fizyon sonucu, büyük miktarda ısı üretir.
 - ✓ Bir ortamda ısı üretiminin diğer kaynağı, ortamın her tarafında meydana gelen ekzotermik kimyasal reaksiyonlardır.
- Isı üretimi hacimsel bir olaydır.
- Bir ortamdaki ısı üretim hızı genellikle, W/m^3 veya $Btu/h \cdot ft^3$ birimiyle
- Bir ortamdaki ısı üretimi hızı hem zamanla hem de konumla değişebilir.

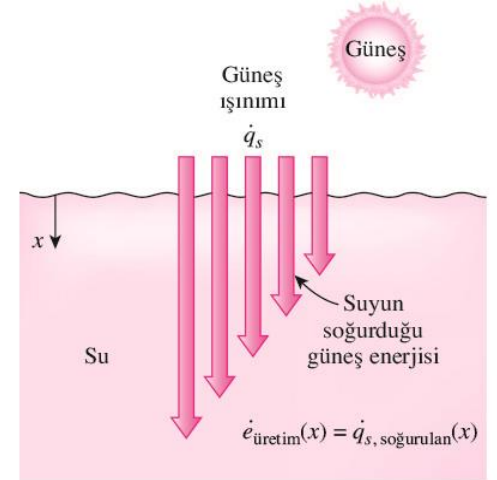


ŞEKİL 2-9

Elektrik enerjisinin ısıya dönüşümünün bir sonucu olarak, ısı bir elektrik ocağının ısıtıcılarında üretilir.

$$\dot{E}_{gen} = \int_V \dot{e}_{gen} dV \quad (W)$$

$$\dot{E}_{gen} = \dot{e}_{gen} V$$



ŞEKİL 2-10

Güneş enerjisinin su tarafından yutulması ısı üretimi olarak ele alınabilir.

Tek Boyutlu Isı İletim Denklemi

Tek camlı bir pencere, bir presli ütünün altındaki metal plaka, dökme demir bir buhar borusu, silindirik bir nükleer yakıt elemanı, bir elektrik direnç teli, su verilen veya temperlenen küresel bir tankın veya küresel metal bir topun duvarı, bir evin duvarı gibi geniş düzlem bir duvarda ısı iletimi dikkate alınsın.

Bu ve diğer birçok geometride ısı iletimine **tek boyutlu** olarak yaklaşılabilir; çünkü bu geometrideki ısı iletimi bir doğrultuda etkindir ve diğer yönlerde ihmal edilebilir.

Aşağıda **Kartezyen**, **silindirik** ve **küresel** koordinatlarda tek boyutlu ısı iletim denklemleri türetilmektedir.

$$\left(\text{Rate of heat conduction at } x \right) - \left(\text{Rate of heat conduction at } x + \Delta x \right) + \left(\text{Rate of heat generation inside the element} \right) = \left(\text{Rate of change of the energy content of the element} \right)$$

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{E}_{\text{gen, element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t} \quad (2-6)$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{E}_{\text{gen, element}} = \dot{e}_{\text{gen}} V_{\text{element}} = \dot{e}_{\text{gen}} A \Delta x$$

Substituting into Eq. 2-6, we get

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{e}_{\text{gen}} A \Delta x = \rho c A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Dividing by $A \Delta x$ gives

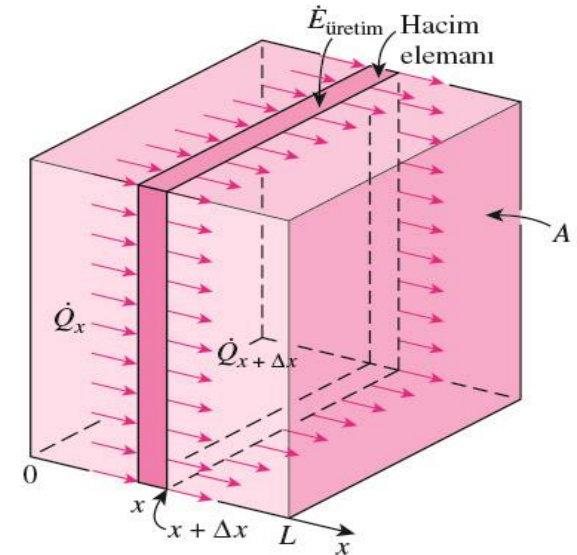
$$-\frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Taking the limit as $\Delta x \rightarrow 0$ and $\Delta t \rightarrow 0$ yields

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Geniş Bir Düzlemde Duvarda Isı İletim Denklemi



$$A_x = A_{x+\Delta x} = A$$

ŞEKİL 2-12

Geniş bir düzlem duvarda bir hacim elemanındaki tek boyutlu ısı iletimi.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Rate of heat} \\ \text{conduction} \\ \text{at } r \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Rate of heat} \\ \text{conduction} \\ \text{at } r + \Delta r \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Rate of heat} \\ \text{generation} \\ \text{inside the} \\ \text{element} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Rate of change} \\ \text{of the energy} \\ \text{content of the} \\ \text{element} \end{array} \right)$$

Uzun Bir Silindirde Isı İletim Denklemi

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{E}_{\text{gen, element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{E}_{\text{gen, element}} = \dot{e}_{\text{gen}} V_{\text{element}} = \dot{e}_{\text{gen}} A \Delta r$$

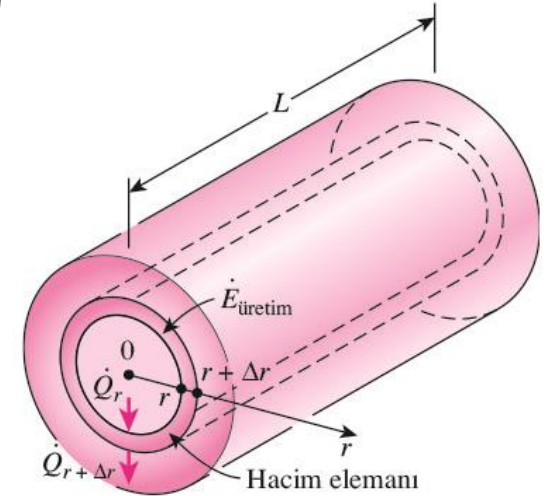
$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{e}_{\text{gen}} A \Delta r = \rho c A \Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$-\frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Taking the limit as $\Delta r \rightarrow 0$ and $\Delta t \rightarrow 0$ yields

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial r} \left(kA \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$



ŞEKİL 2-14

Uzun bir silindirde bir hacim elemanı içerisinde tek boyutlu ısı iletimi.

Variable conductivity:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(1) Steady-state:
($\partial/\partial t = 0$)

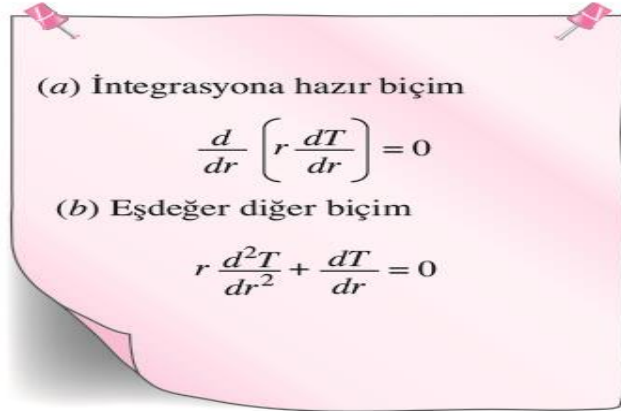
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = 0$$

(2) Transient, no heat generation:
($\dot{e}_{\text{gen}} = 0$)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) Steady-state, no heat generation:
($\partial/\partial t = 0$ and $\dot{e}_{\text{gen}} = 0$)

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$



ŞEKİL 2-15

İçerisinde ısı üretimi olmayan bir silindirde tek boyutlu sürekli ısı iletimi için diferansiyel denklemin iki eşdeğer durumu.

İçerisinde ısı üretimi olmayan bir silindirde tek boyutlu sürekli ısı iletimi için diferansiyel denklemin iki eşdeğer durumu.

Bir Kürede Isı İletim Denklemleri

Variable conductivity:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(1) *Steady-state:*
($\partial/\partial t = 0$)

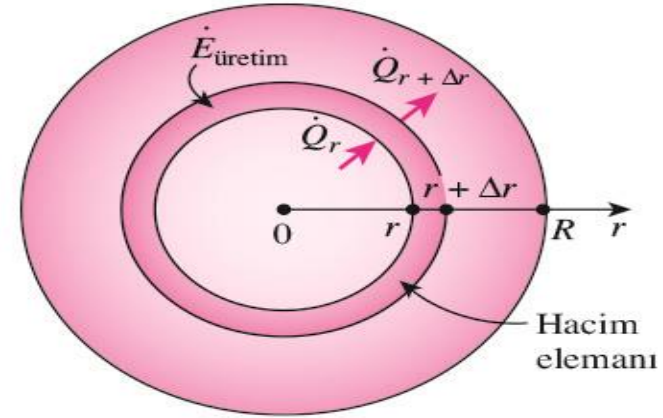
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = 0$$

(2) *Transient,*
no heat generation:
($\dot{e}_{\text{gen}} = 0$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state,*
no heat generation:
($\partial/\partial t = 0$ and $\dot{e}_{\text{gen}} = 0$)

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{or} \quad r \frac{d^2 T}{dr^2} + 2 \frac{dT}{dr} = 0$$



ŞEKİL 2-16

Bir küredeki hacim elemanı içerisinde tek boyutlu ısı iletimi.

Birleşik Tek Boyutlu Isı İletim Denklemi

Düzlem duvar, silindir ve küre için, tek boyutlu, zamana bağlı ısı iletim denkleminin incelenmesi, üç denklemin derli toplu bir şekilde,

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$n = 0$ düzlem duvar için

$n = 1$ silindir için

$n = 2$ küre için

Düzlem duvar durumunda r değişkeni yerine alışılmış şekliyle x alınır.

Bu denklem önceden tanımlandığı gibi, sürekli veya ısı üretimi olmayan durumlar için de basitleştirebilir.