4. HAFTA
ISI İLETİM DENKLEMİ

GENEL ISI İLETİM DENKLEMİ

Bir önceki bölümde tek boyutlu ısı iletimi göz önüne alınmış ve diğer boyutlarda ısı iletiminin ihmal edilebileceği kabul edilmiştir.

Uygulamada karşılaşılan çoğu ısı transfer problemine tek boyutlu olarak yaklaşılabilir; bu kitapta çoğunlukla bu tür problemlere değinilmektedir.
Ancak her zaman durum böyle değildir ve bazen diğer doğrultulardaki ısı transferinin de göz önüne alınması gerekir.

Bu durumlarda ısı transferi çok boyutlu ısı transferi olarak adlandırılır. Bu bölümde kartezyen, silindirik ve küresel koordinat sistemlerinde ana diferansiyel denklemler türetilmektedir.

Kartezyen Koordinatlar

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction at}\\ x, y, \text{and } z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } x+\Delta x,\\ y+\Delta y, \text{and } z+\Delta z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{generation}\\ \text{inside the}\\ \text{element}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{content of}\\ \text{the element}\end{pmatrix}$$

or

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{\text{gen, element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t} \qquad \text{(2–36)}$$

Noting that the volume of the element is $V_{\text{element}} = \Delta x \Delta y \Delta z$, the change in the energy content of the element and the rate of heat generation within the element can be expressed as

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

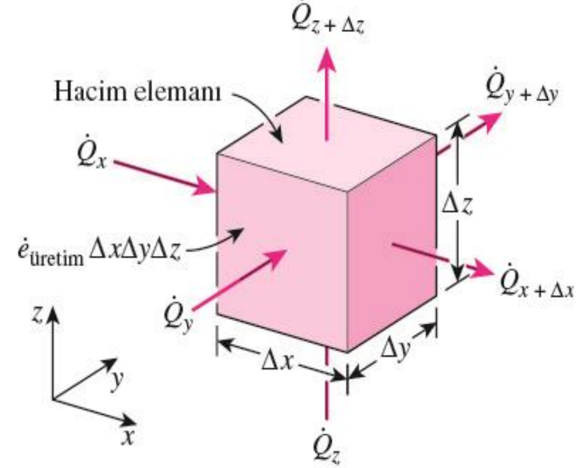
$$\dot{E}_{\text{gen, element}} = \dot{e}_{\text{gen}} V_{\text{element}} = \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Substituting into Eq. 2–36, we get

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Dividing by $\Delta x \Delta y \Delta z$ gives

$$-\frac{1}{\Delta y \Delta z}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y}\frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \qquad \text{(2–37)}$$



ŞEKİL 2–20
Bir prizmatik hacim elemandaki üç boyutlu ısı iletimi.

Bu dersteki tüm yazılı ve görsel materyaller; **Çengel, Y.A., Isı ve Kütle Transferi Pratik Bir Yaklaşım, Çeviri Editörü Vedat Tanyıldızı**, 3.Baskı, Güven Bilimsel kitabından alınmıştır.

(1) *Steady-state:*
(called the **Poisson equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$$

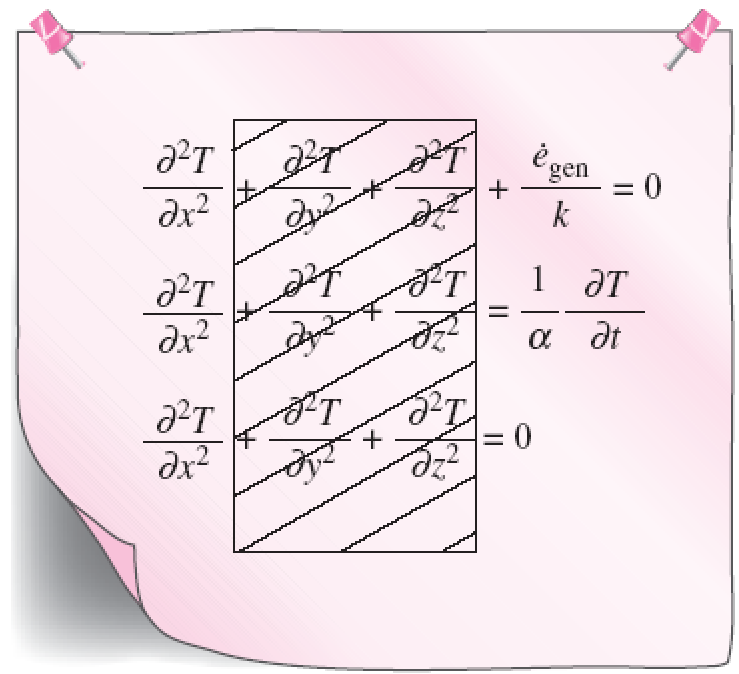
(2) *Transient, no heat generation:*
(called the **diffusion equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:*
(called the **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Sıcaklık yalnız bir doğrultuda değiştiği zaman, üç boyutlu ısı iletim denklemi tek boyutlu ısı iletim denklemine indirgenir.

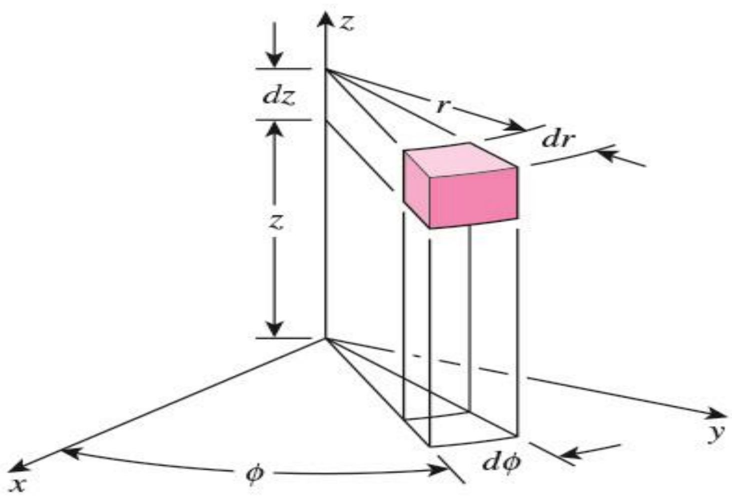


Silindirik Koordinatlar

Bir noktanın kartezyen ve silindirik koordinat sistemlerindeki koordinatları arasında:

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \qquad \text{and} \qquad z = z$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$



ŞEKİL 2–22
Silindirik koordinat sisteminde bir diferansiyel hacim elemanı.

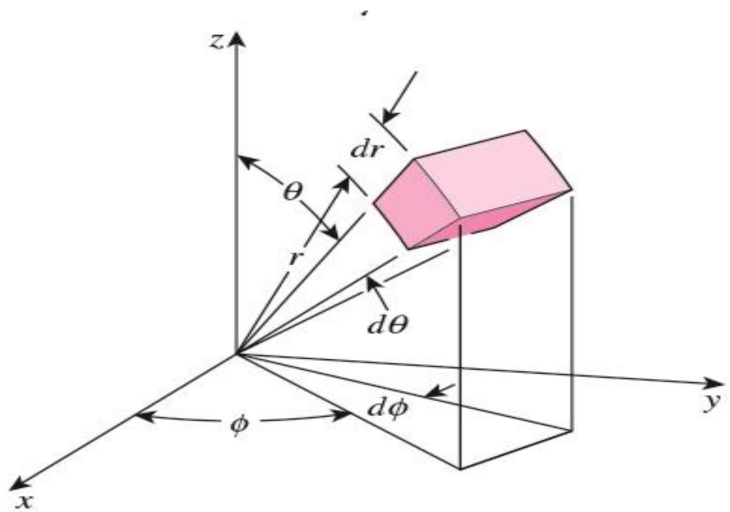
Bu dersteki tüm yazılı ve görsel materyaller; **Çengel, Y.A., Isı ve Kütle Transferi Pratik Bir Yaklaşım, Çeviri Editörü Vedat Tanyıldızı**, 3.Baskı, Güven Bilimsel kitabından alınmıştır.

Küresel Koordinatlar

Bir noktanın Kartezyen ve küresel koordinat sistemlerindeki koordinatları arasında:

$$x = r\cos\phi\,\sin\theta, \qquad y = r\sin\phi\,\sin\theta, \qquad \text{and} \qquad z = \cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \dot{e}_{gen} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$



ŞEKİL 2–23
Küresel koordinatlarda bir diferansiyel hacim elemanı.

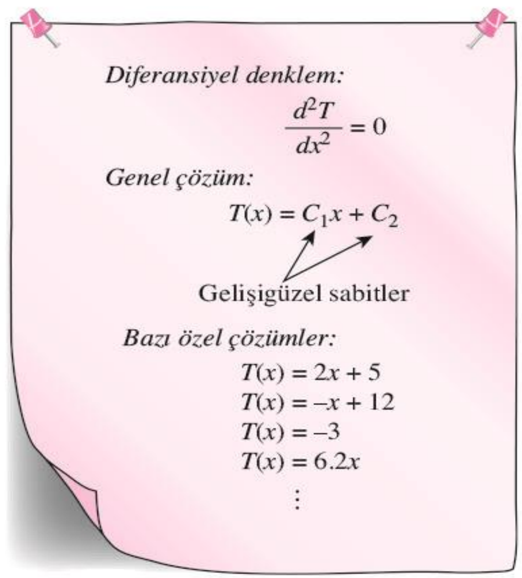
Bu dersteki tüm yazılı ve görsel materyaller; **Çengel, Y.A., Isı ve Kütle Transferi Pratik Bir Yaklaşım, Çeviri Editörü Vedat Tanyıldızı**, 3.Baskı, Güven Bilimsel kitabından alınmıştır.

SINIR VE BAŞLANGIÇ ŞARTLARI

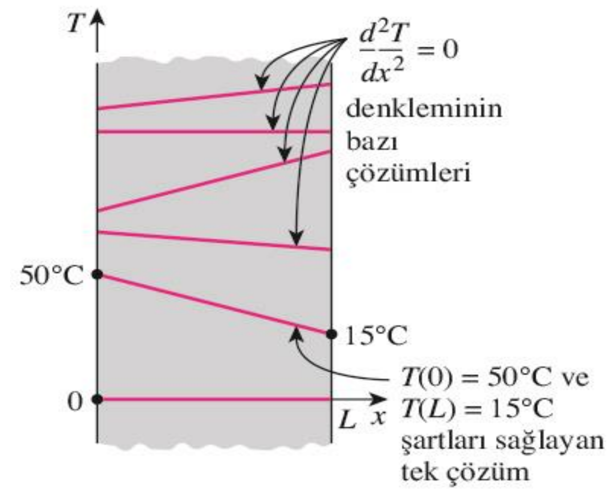
Ortamdaki ısı akısının ve sıcaklık dağılımının yüzeydeki şartlara bağlı olduğu bilinmektedir ve bir ortamdaki ısı transfer probleminin tanımı, ortamı sınırlayan yüzeylerdeki ısıl şartlar tam olarak tarif edilmeden tamamlanmaz.

Sınırlardaki ısıl şartların matematik ifadeleri sınır şartları olarak adlandırılır.

Belirli bir anda duvardaki herhangi bir noktada sıcaklık, ısı iletim işleminin başlangıcında duvar şartına bağlıdır. Genellikle $t = 0$ anında tanımlı böylesi bir şart, ortamın başlangıçtaki sıcaklık dağılımının matematik ifadesidir ve başlangıç şartı olarak adlandırılır.



ŞEKİL 2–25
Tipik bir diferansiyel denklemin genel çözümü gelişigüzel sabit ve dolayısıyla sonsuz sayıda çözüm içermektedir.



ŞEKİL 2–26
Bir ısı transferi problemini bütünüyle tanımlamak için, ısı transferinin önemli olduğu her bir doğrultuda iki sınır şartı verilmelidir.

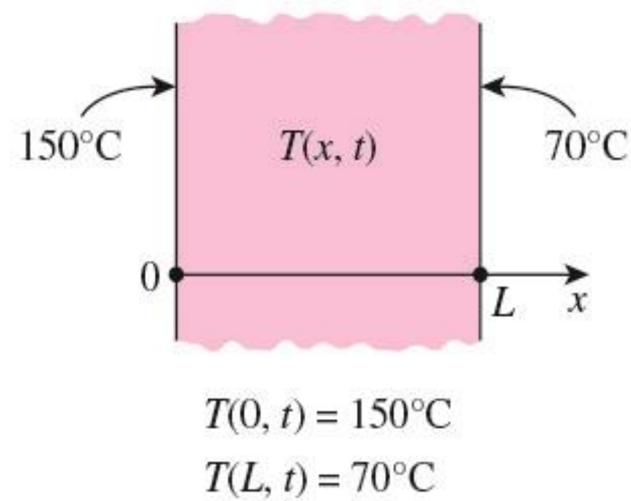
$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

Sınır Şartları

- Tanımlı Sıcaklık Sınır Şartı
- **Tanımlı Isı Akısı Sınır Şartı**
- **Taşınım Sınır Şartı**
- **Işınım Sınır Şartı**
- **Ara yüzey Sınır Şartları**
- **Genelleşmiş Sınır Şartları**

1 Tanımlı Sıcaklık Sınır Şartı

Bir açık yüzeyin sıcaklığı genellikle doğrudan ve kolayca ölçülebilir.
Bu yüzden, bir yüzeydeki ısıl şartları tanımlamanın en kolay yollarından biri sıcaklığı tanımlamaktır.
Mesela, L kalınlıklı bir düzlem duvarda tek boyutlu ısı iletimi için tanımlı sıcaklık sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:



ŞEKİL 2–27
Bir düzlem duvarın her iki yüzeyinde tanımlı sıcaklık sınır şartları.

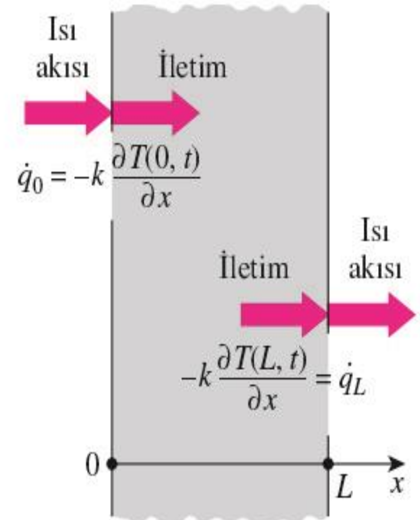
$$T(0, t) = T_1$$
$$T(L, t) = T_2$$

Burada T1 ve T2 sırasıyla x = 0 ve x = L yüzeylerinde belirtilen sıcaklıklardır.
Tanımlı sıcaklıklar, sürekli ısı iletim durumundaki şekliyle sabit olabilirler veya zamana göre değişebilirler.

2 Tanımlı Isı Akısı Sınır Şartları

Sınırlar dahil olmak üzere ortamın herhangi bir yerinde pozitif x yönünde ısı akısı şöyle ifade edilebilir:

$$\dot{q} = -k\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\begin{array}{c}\text{Heat flux in the}\\ \text{positive } x - \text{direction}\end{array}\right) \qquad (\mathrm{W/m^2})$$



ŞEKİL 2–28

Bir düzlem duvarın her iki yüzeyinde tanımlı ısı akısı sınır şartları.

Örnek olarak, her iki tarafındaki ortama 50 W/m2'lik ısı akısı olan L kalınlıklı bir düzlem duvar için tanımlı ısı akısı sınır şartları:

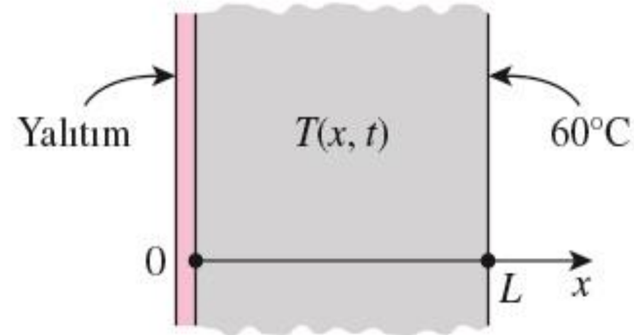
$$-k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 50 \qquad \text{and} \qquad -k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = -50$$

Özel Durum: Yalıtımlı Sınır

Yüzeyden iyi yalıtılmış bir yüzey, tanımlı ısı akısı sıfır olan bir yüzey olarak modellenebilir. Bu durumda mükemmel yalıtılmış bir yüzeyde (mesela, x = 0 ‘da) sınır şartı böyle tanımlanabilir.

$$k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$$

Yalıtımlı bir yüzeyde, sıcaklığın yalıtımlı yüzeye dik doğrultudaki yerel değişkene göre birinci türevi (sıcaklık gradyanı) sıfırdır.



$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$T(L,t) = 60°\text{C}$$

ŞEKİL 2–29
Yalıtımlı ve tanımlı sıcaklık sınır şartlarına sahip bir düzlem duvar.

Diğer Özel Durum: Isıl Simetri

Erki eden ısıl şartlardaki simetrinin bir sonucu olarak, bazı ısı transfer problemleri ısıl simetriye sahiptirler.

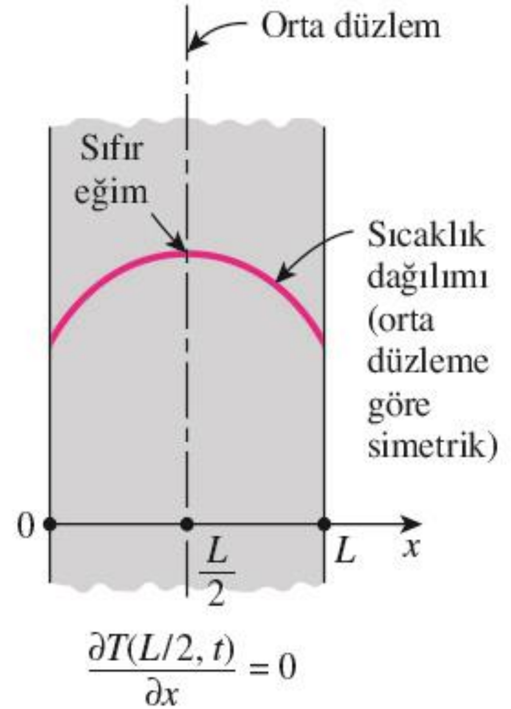
Mesela, havada düşey biçimde asılı L kalınlıklı geniş bir plakanın iki yüzeyi aynı ısıl şartlara açıktır ve dolayısıyla plakanın bir yarısındaki sıcaklık dağılımı diğer yarısındaki sıcaklık dağılımı ile aynı olur.

Yani bu plakadaki ısı transfer problemi, $x = L/2$ merkez düzlemine göre ısıl simetriye sahip olur.

Bundan dolayı, orta düzlem yalıtılmış yüzey gibi görülebilir; bu simetri düzlemindeki ısıl şartlar:

$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$

Yalıtım veya sıfır ısı akısı sınır şartına benzer.



ŞEKİL 2–30

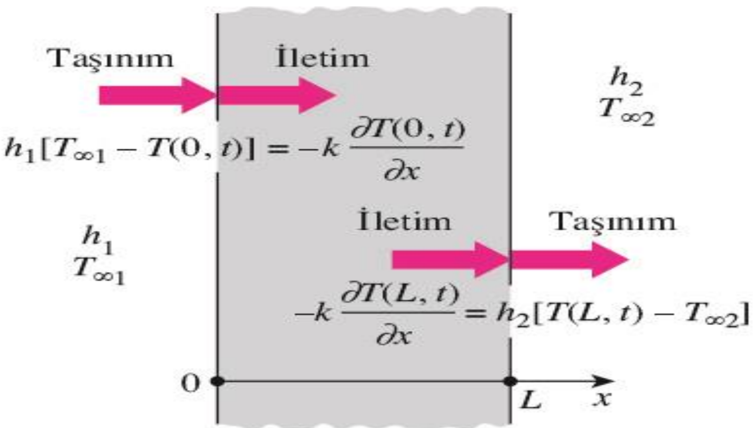
Düzlem bir duvarın merkez düzleminde ısıl simetri sınır şartı.

3 Taşınım Sınır Şartı

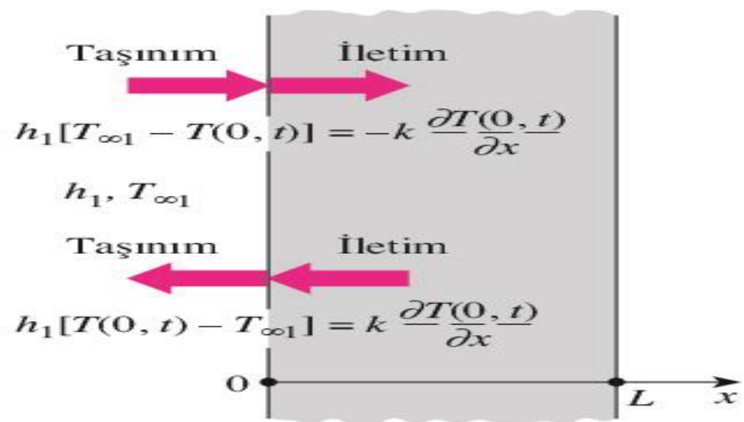
L kalınlıklı bir düzlem duvarda x yönünde tek boyutlu ısı transferi için, her iki yüzeyde taşınım sınır şartları:

$$\begin{pmatrix}\text{Heat conduction}\\ \text{at the surface in a}\\ \text{selected direction}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Heat convection}\\ \text{at the surface in}\\ \text{the same direction}\end{pmatrix}$$

$$-k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h_1[T_{\infty 1} - T(0,t)] \qquad -k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h_2[T(L,t) - T_{\infty 2}]$$



ŞEKİL 2–32
Düzlem bir duvarın her iki yüzeyinde taşınım sınır şartı.



ŞEKİL 2–33
Bir sınırda kabul edilen ısı transferi yönünün sınır şartı ifadesinde bir etkisi yoktur.

4 Işınım Sınır Şartı

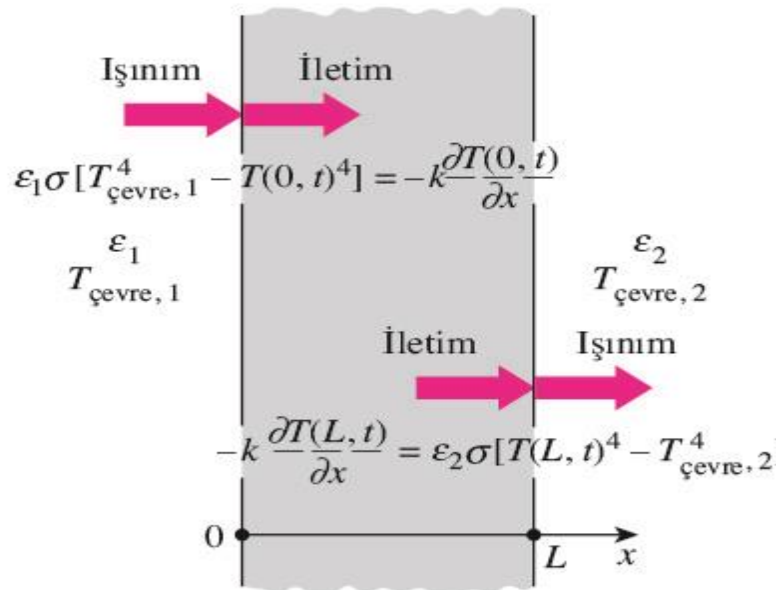
Bir yüzeydeki ısınım sınır şartı

$$\begin{pmatrix}\text{Heat conduction}\\ \text{at the surface in a}\\ \text{selected direction}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Radiation exchange}\\ \text{at the surface in}\\ \text{the same direction}\end{pmatrix}$$

L kalınlıklı bir plakada x doğrultusunda tek boyutlu ısı transferi için her iki yüzeyde ışınım sınır şartı:

$$-k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \varepsilon_1\sigma[T^4_{\text{surr},1} - \text{T}(0,t)^4]$$

$$-k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \varepsilon_2\sigma[T(L,t)^4 - T^4_{\text{surr},2}]$$



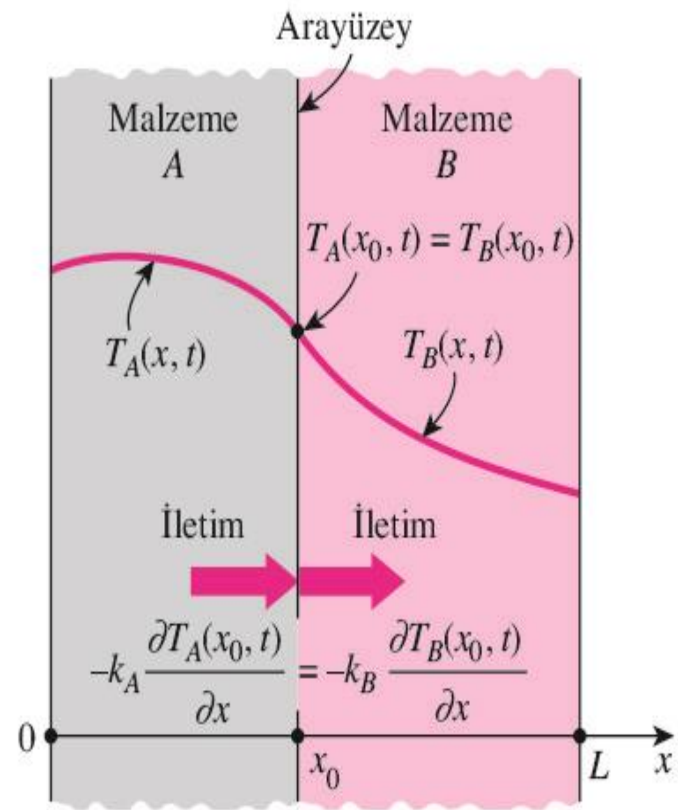
ŞEKİL 2–35
Düzlem bir duvarın her iki yüzeyinde ışınım sınır şartı.

5 Ara yüzey Sınır Şartları

Bir ara yüzey sınır şartları şu esaslar alınarak belirlenir:
Temas halindeki iki cisim, temas alanında aynı sıcaklığa sahip olmalıdır,
Bir ara yüzey -ki bir yüzeydir- herhangi bir enerji depolayamaz ve dolayısıyla ara yüzeyin her iki tarafındaki ısı akısı aynı olmalıdır.
x = x0’ da mükemmel temas halindeki A ve B cisimlerinin ara yüzeydeki sınır şartları:

$$T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t)$$

$$-k_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x}$$



ŞEKİL 2–36

Mükemmel temas halinde iki cismin ara yüzeyindeki sınır şartı.

6 Genelleşmiş Sınır Şartları

Bir yüzey genellikle aynı anda taşınım, ışınım ve tanımlı ısı akısı içerebilir.
Böyle durumlarda sınır şartları yine aşağıda ifade edildiği gibi bir yüzey enerji dengesi ile elde edilir:

$$\begin{pmatrix}\text{Heat transfer}\\ \text{to the surface}\\ \text{in all modes}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Heat transfer}\\ \text{from the surface}\\ \text{in all modes}\end{pmatrix}$$

SÜREKLİ TEK BOYUTLU ISI İLETİM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Kartezyen, silindirik ve küresel geometrilerde, geniş bir alanı kapsayan ısı iletim problemleri çözülmektedir.
Dikkat, -sürekli tek boyutlu ısı iletim problemleri benzeri- adi diferansiyel denklemler ile sonuçlanan problemlerle sınırlıdır. Ayrıca ısıl iletkenlik sabit kabul edilmektedir.
Isı iletim problemlerinin çözüm süreci şöyle özetlenebilir:

- Uygulanabilir diferansiyel denklem en basit biçimiyle elde edilip sınır şartları belirlenerek problemin formülasyonu yapılır.
- Diferansiyel denklemin genel çözümü elde edilir
- Sınır şartları uygulanır ve genel çözümdeki gelişigüzel sabitler bulunur.

ŞEKİL 2–39
Isı transferi problemlerinin çözümünü içeren temel adımlar.

BİR KATIDA ISI ÜRETİMİ

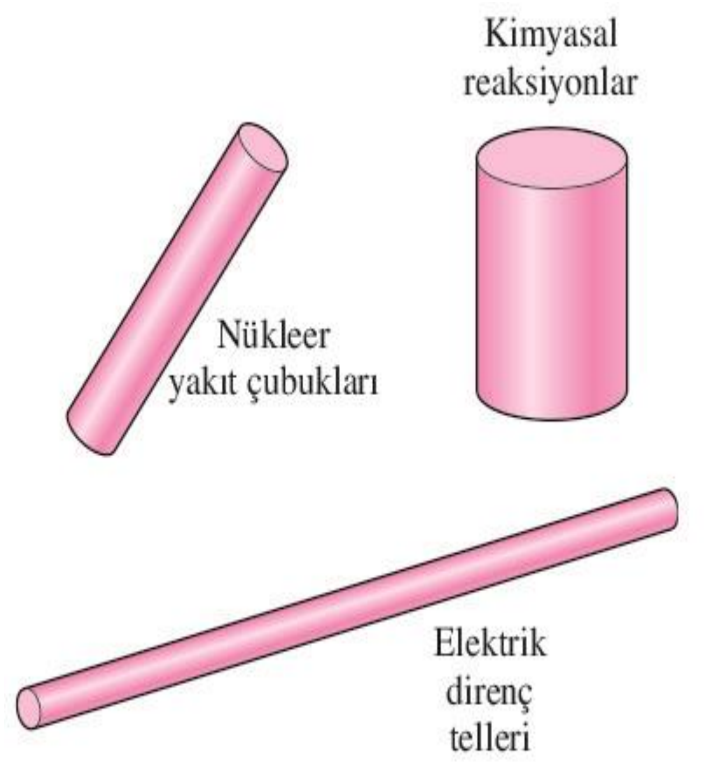
Uygulamada karşılaşılan birçok ısı transfer problemi, ortam içinde bazı enerji biçimlerinin ısıl enerjiye dönüşümünü içerir.

İçlerinde sıcaklık artışı olduğunu gösteren böylesi ortamlarda iç ısı üretimi olduğu söylenir.

- Tellerle dirençle ısıtma,
- Bir katıda ekzotermik kimyasal reaksiyonlar,
- Nükleer enerjinin ısıya dönüştüğü bazı ısı üretimi örnekleridir.

Mesela, dış yarıçapı r0 ve uzunluğu L olan bir elektrik telinde ısı üretimi:

$$\dot{e}_{gen} = \frac{\dot{E}_{gen,\ electric}}{V_{wire}} = \frac{I^2 R_e}{\pi r_o^2 L} \qquad (\text{W/m}^3)$$



ŞEKİL 2–53

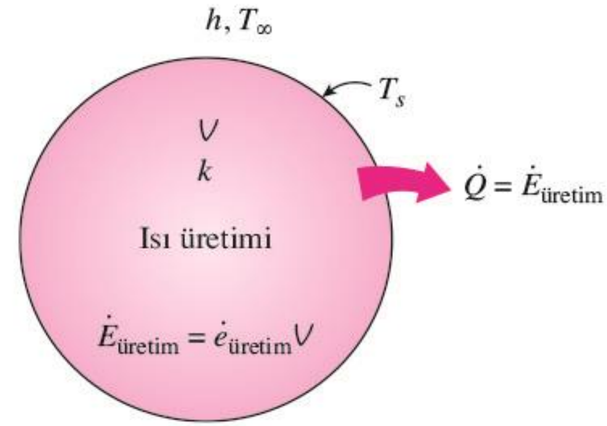
Uygulamalarda katılar içerisinde ısı üretimiyle sık olarak karşılaşılır.

Isı üretiminin olduğu bir ortamda önemli nicelikler, Ts yüzey sıcaklığı ve ortamda sürekli şartlarda meydana gelen maksimum sıcaklık Tmaks' dır.

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \textit{heat transfer}\\ \text{from the solid}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \textit{energy generation}\\ \text{within the solid}\end{pmatrix}$$

$$\dot{Q} = \dot{e}_{\text{gen}} V \qquad \text{(W)} \qquad \dot{Q} = hA_s\,(T_s - T_\infty) \qquad \text{(W)}$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{e}_{\text{gen}} V}{hA_s}$$



ŞEKİL 2–54
Sürekli şartlarda katı içerisinde üretilen ısının tamamı, dış yüzeyden uzaklaşmalıdır.

For a large *plane wall* of thickness $2L$ ($A_s = 2A_{\text{wall}}$ and $V = 2LA_{\text{wall}}$) with both sides of the wall maintained at the same temperature T_s, a long solid *cylinder* of radius r_o ($A_s = 2\pi r_o L$ and $V = \pi r^2{}_o L$), and a solid *sphere* of radius r_o ($A_s = 4\pi r_o^2$ and $V = \frac{4}{3}\pi r_o^3$), Eq. 2–66 reduces to

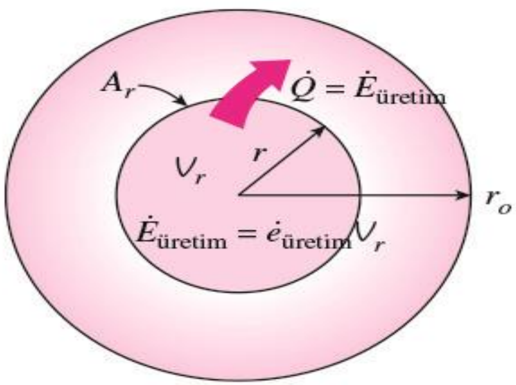
$$T_{s,\text{ plane wall}} = T_\infty + \frac{\dot{e}_{\text{gen}} L}{h} \qquad T_{s,\text{ cylinder}} = T_\infty + \frac{\dot{e}_{\text{gen}} r_o}{2h} \qquad T_{s,\text{ sphere}} = T_\infty + \frac{\dot{e}_{\text{gen}} r_o}{3h}$$

$$-kA_r\frac{dT}{dr} = \dot{e}_{gen}V_r \quad A_r = 2\pi rL \quad V_r = \pi r^2 L \quad -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr} = \dot{e}_{gen}(\pi r^2 L) \quad \rightarrow \quad dT = -\frac{\dot{e}_{gen}}{2k} r dr$$

Integrating from $r = 0$ where $T(0) = T_0$ to $r = r_o$ where $T(r_o) = T_s$ yields

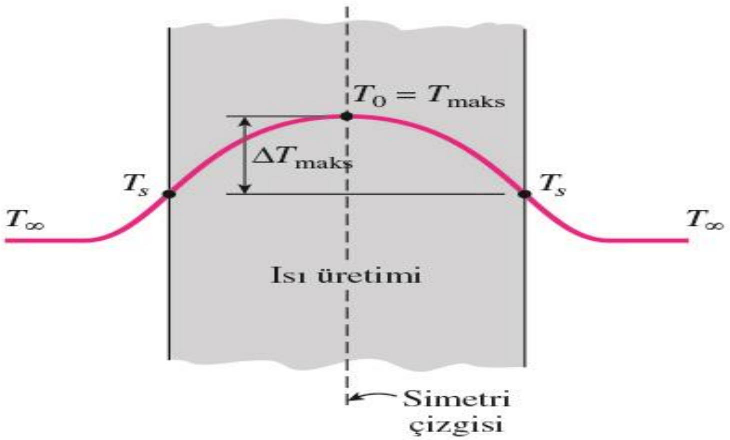
$$\Delta T_{\text{max, cylinder}} = T_0 - T_s = \frac{\dot{e}_{gen} r_o^2}{4k} \qquad \Delta T_{\text{max, plane wall}} = \frac{\dot{e}_{gen} L^2}{2k} \qquad \Delta T_{\text{max, sphere}} = \frac{\dot{e}_{gen} r_o^2}{6k}$$

$$T_{\text{center}} = T_0 = T_s + \Delta T_{\text{max}}$$



ŞEKİL 2–55

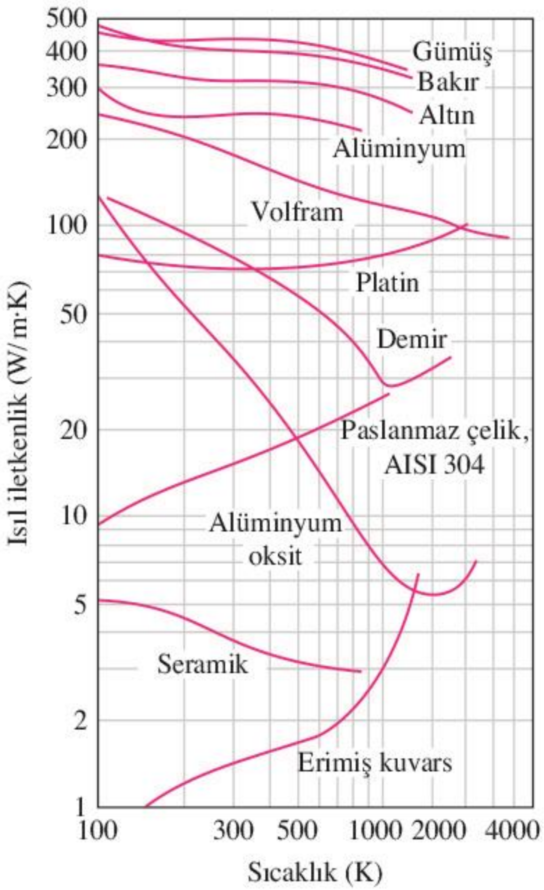
r yarıçapındaki silindirik bir kabuk içerisindeki ısı iletimi, kabuk içerisinde üretilen ısıya eşittir.



ŞEKİL 2–56

Üniform ısı üretimli simetrik bir katıda maksimum sıcaklık silindirin merkezinde meydana gelir.

DEĞİŞKEN ISIL İLETKENLİK, *k*(T)



ŞEKİL 2–62
Bazı katıların ısıl iletkenliklerinin sıcaklıkla değişimi.

Belirli bir sıcaklık aralığında ısı iletiminin sıcaklık ile değişimi büyük olduğu zaman, hatayı en az indirebilmek için bu değişimini dikkate almak gerekir.
Isıl iletkenliğinin sıcaklığa değişimi k(T) bilindiği zaman, T1 ve T2 sıcaklık aralığında ısı iletim katsayısının ortalama değeri:

$$k_{avg} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k(T)dT}{T_2 - T_1}$$

$$\dot{Q}_{\text{plane wall}} = k_{avg} A \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{A}{L}\int_{T_2}^{T_1} k(T)dT$$

$$\dot{Q}_{\text{cylinder}} = 2\pi k_{avg} L \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}\int_{T_2}^{T_1} k(T)dT$$

$$\dot{Q}_{\text{sphere}} = 4\pi k_{avg} r_1 r_2 \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1}\int_{T_2}^{T_1} k(T)dT$$

İlgili sıcaklık aralığında bir malzemenin ısıl iletkenliğinin sıcaklıkla değişimi, doğrusal bir fonksiyonla:

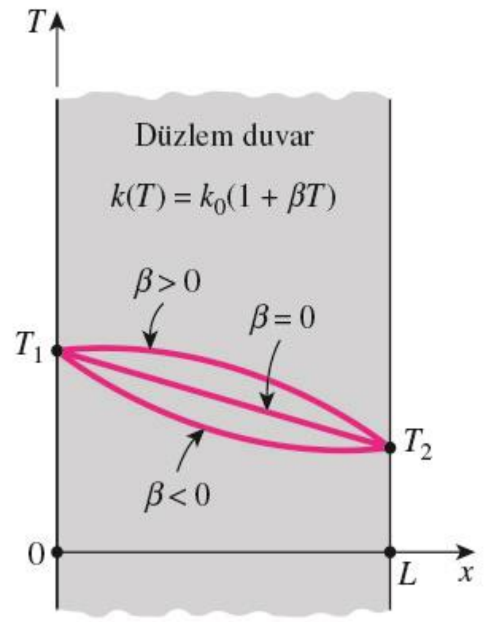
$$k(T) = k_0(1 + \beta T)$$

β ısıl iletkenliğin sıcaklık katsayısı

Bu durumda T1'den T2'ye kadar sıcaklık aralığında ısıl iletkenliğin ortalama değeri:

$$k_{avg} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + \beta T)dT}{T_2 - T_1} = k_0\left(1 + \beta \frac{T_2 + T_1}{2}\right) = k(T_{avg})$$

Dikkat edilirse bu durumda ortalama ısıl iletkenlik, ortalama sıcaklıktaki ısıl iletkenlik değerine eşittir.



ŞEKİL 2–63
Sürekli tek boyutlu ısı iletiminde sabit ve değişken ısıl iletkenlik halleri için düzlem bir duvardaki sıcaklık değişimi.