8. HAFTA

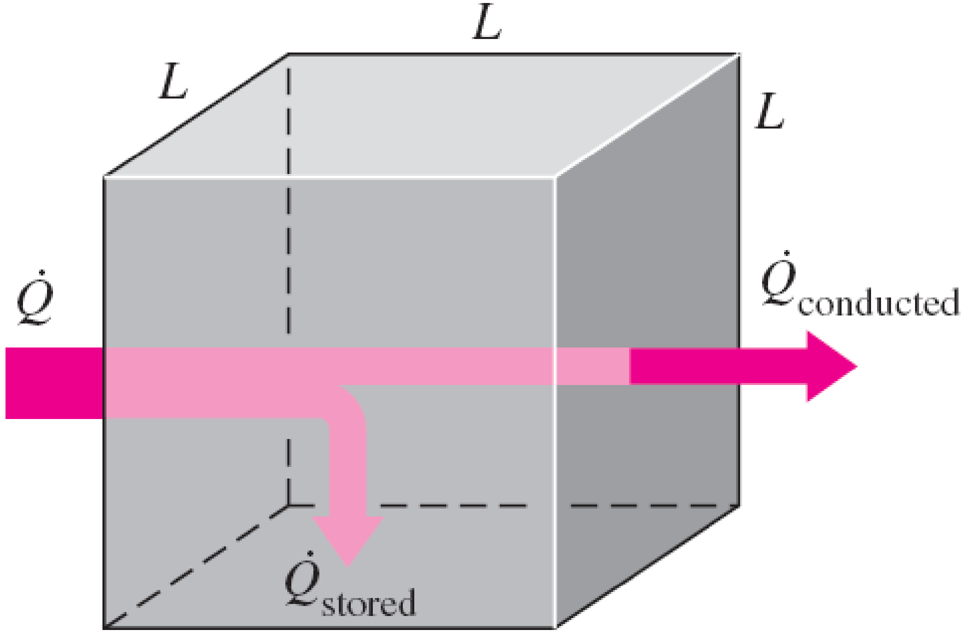
ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ

Fiziksel öneminin anlaşılması için Fourier sayısı

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{kL^2\,(1/L)}{\rho c_p L^3/t}\frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{The rate at which heat is \textit{conducted} across } L \text{ of a body of volume } L^3}{\text{The rate at which heat is \textit{stored} in a body of volume } L^3}$$

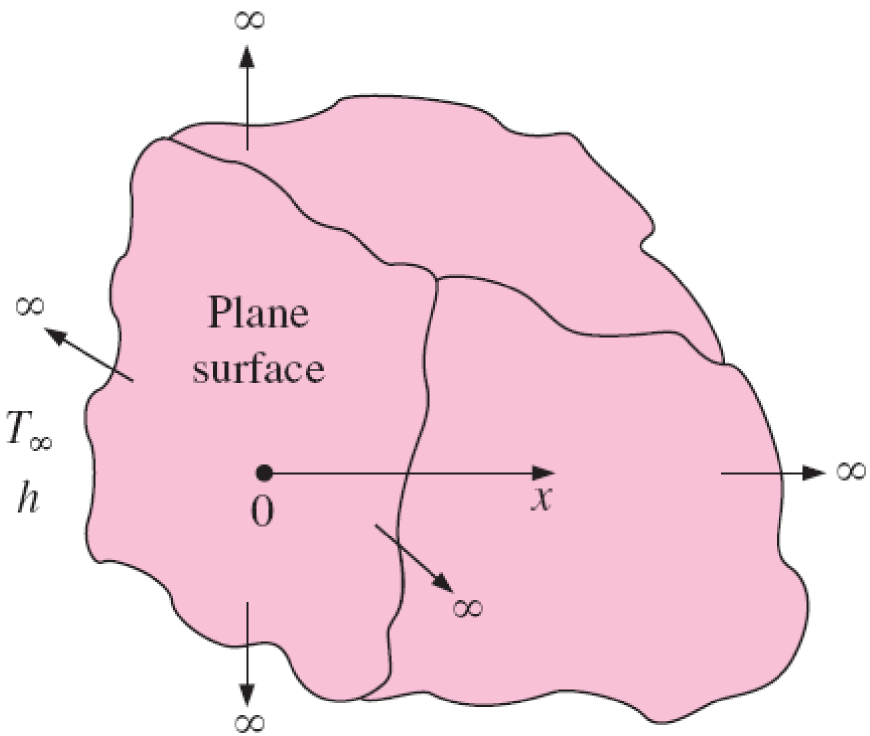
- **Fourier sayısı, cisim içerisinde iletilen ısının, depolanan ısıya oranının bir ölçütüdür.**
- Büyük Fourier sayısı değeri, ısının cisim içerisine daha hızlı yayıldığını gösterir.

t zamanındaki Fourier sayısı o zamanda iletilen ısı miktarının depolanan ısı miktarına oranı olarak görülebilir.



Fourier number: $\tau = \dfrac{\alpha t}{L^2} = \dfrac{\dot{Q}_{\text{conducted}}}{\dot{Q}_{\text{stored}}}$

YARISONSUZ KATILARDA ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ



Yarısonsuz bir cismin şematik gösterimi

Yarısonsuz katı, tek düzlem yüzeyi olan ve diğer bütün doğrultularda sonsuza uzanan idealleştirilmiş bir cisimdir.
Yer küre, yüzeyinin yanındaki sıcaklık değişmeleri hesaplanırken bir yarı sonsuz cisim olarak düşünülebilir.
Kalın bir duvar, -eğer yüzeylerden birinin yakınındaki bölgede sıcaklık değişimiyle ilgileniyor ve diğer yüzey, gözlem süresince ilgilenen bölge üzerimde herhangi bir etkiye çok uzak ise- yarısonsuz bir ortam olarak modellenebilir

Isının cisim içinde derinlere nüfuzu için yeterli zaman olmadığı için, çoğu cisimler kısa zaman dilimlerinde yarısonsuz katı olarak modellenebilir.

Yüzey sıcaklığı t = 0 anında Ts sıcaklığına getirilir ve bütün zamanlarda bu sabit değerde tutulursa problemin formülasyonu

Differential equation: $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Boundary conditions: $T(0, t) = T_s$ and $T(x \to \infty, t) = T_i$

Initial condition: $T(x, 0) = T_i$

Similarity variable: $$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2\eta\frac{dT}{d\eta}$$

$T(0) = T_s$ and $T(\eta \to \infty) = T_i$

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-u^2}du = \text{erf}(\eta) = 1 - \text{erfc}(\eta)$$

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-u^2}du$$ hata fonksiyonu

$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta \varepsilon^{-u^2}du$$ tamamlayıcı hata fonksiyonu

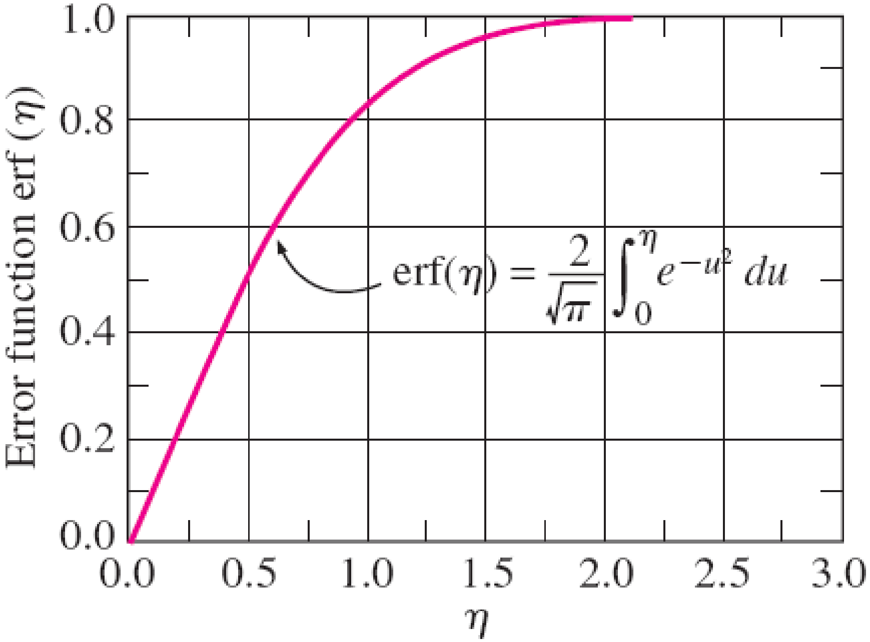
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{and} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x}{2t\sqrt{4\alpha t}}\frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t}\frac{d^2T}{d\eta^2}$$

Isı iletimi denkleminin türevlerindeki değişkenlerin zincir kuralıyla dönüşümü



Hata fonksiyonu, değeri 0 ile 1 arasında değişen ve aynen sinüs tanjant gibi standart bir matematiksel fonksiyondur.

$$\dot{q}_s = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -k\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\bigg|_{\eta=0} = -kC_1 e^{-\eta^2}\frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\bigg|_{\eta=0} = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

Case 1: Specified Surface Temperature, T_s = constant

$$\frac{T(x,\ t) - T_i}{T_s - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad \text{and} \quad \dot{q}_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Case 2: Specified Surface Heat Flux, $\dot{q}_s$ = constant.

$$T(x,\ t) - T_i = \frac{\dot{q}_s}{k}\left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]$$

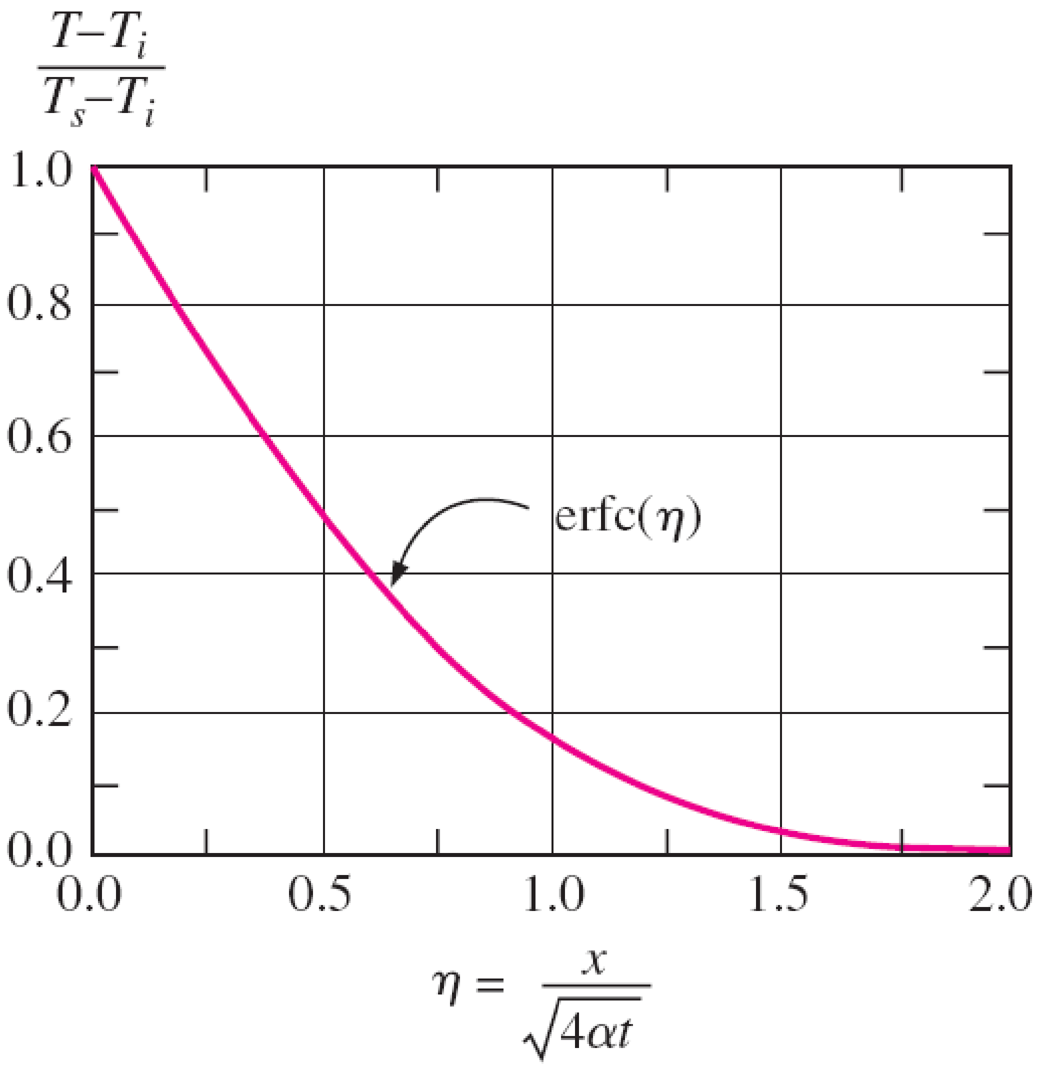
Case 3: Convection on the Surface, $\dot{q}_s(t) = h[T_\infty - T(0, t)]$.

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

Case 4: Energy Pulse at Surface, e_s = constant.

$$T(x,\ t) - T_i = \frac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$

Sınır şartları için, aşağıda sonuçları verilen analitik çözümler elde edilebilir.



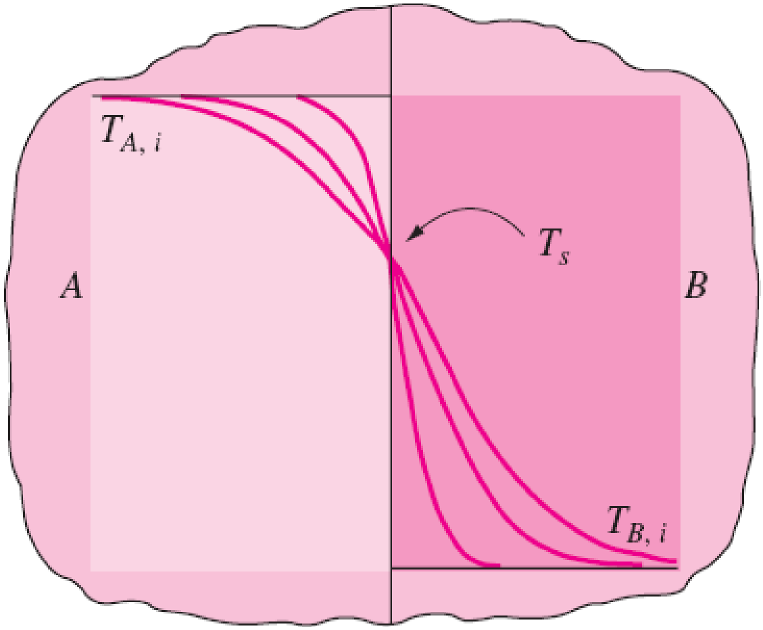
Yüzeyi sabit bir Ts sıcaklığında tutulan yarısonsuz bir cisimde zamana bağlı ısı iletimi için boyutsuz sıcaklık dağılımı

İki Yarısonsuz Katının Teması

Başlangıçta üniform sıcaklıkları Ta.i ve Tb.i olan büyük A ve B cisimleri birbiriyle temas ettirildiği zaman, temas yüzeyinde sıcaklıkları hemen eşitlenir.

Eğer iki cisim aynı sabit özellikli malzemeden ise ısıl simetri, temas yüzey sıcaklığının Ts = (Ta.i + Tb.i)/2 aritmetik ortalama olmasını gerektirir.

Eğer cisimlerin malzemeleri farklıysa sıcaklıkları yine de eşitlenir; fakat bu durumda Ts yüzey sıcaklığı aritmetik ortalama sıcaklıktan farklı olur.



Farklı başlangıç sıcaklıklarına sahip iki yarısonsuz katının teması

$$\dot{q}_{s,A} = \dot{q}_{s,B} \rightarrow -\frac{k_A(T_s - T_{A,i})}{\sqrt{\pi \alpha_A t}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{\sqrt{\pi \alpha_B t}} \rightarrow \frac{T_{A,i} - T_s}{T_s - T_{B,i}} = \sqrt{\frac{(k\rho c_p)_B}{(k\rho c_p)_A}}$$

$$T_s = \frac{\sqrt{(k\rho c_p)_A}\,T_{A,i} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}\,T_{B,i}}{\sqrt{(k\rho c_p)_A} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}}$$

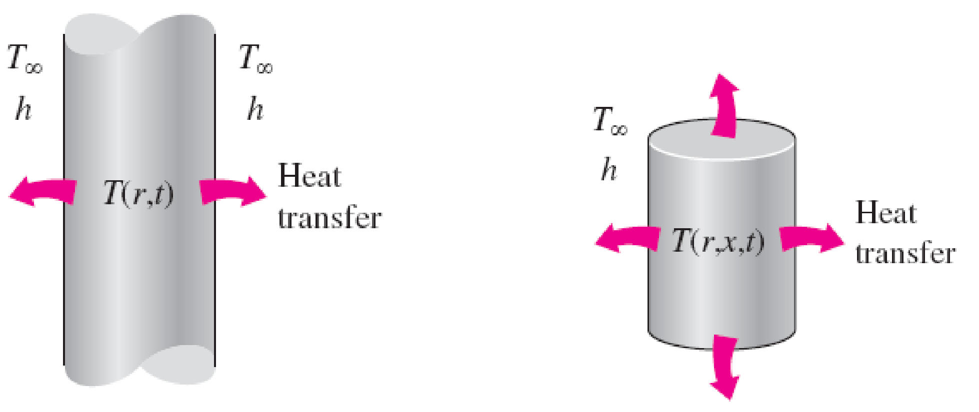
Temas ettirilen iki cismin ortak yüzey sıcaklığında, daha büyük kpcp' ye sahip cisim baskın olur.

Örnek: Deri sıcaklığı 35°C olan bir kişi her ikisinin de sıcaklığı 15°C olan alüminyum ve tahta bloklara dokunduğu zaman, temas yüzeyindeki sıcaklığın alüminyum blok için 15.9°C ve tahta blok için 30°C olacağı gösterilebilir.

BOYUTLU SİSTEMLERDE ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ

- Çarpım çözümü olarak bilinen bir bindirme yaklaşımı kullanılarak, karşılaşılan kısa silindir, uzun dörtgen çubuk ya da yarısonsuz silindir veya plaka gibi geometrilerde iki boyutlu zamana bağlı ısı iletim problemlerine ve hatta –katının bütün yüzeyleri aynı ısı transfer katsayısıyla, aynı T∞ sıcaklığındaki akışkanla taşınım yapması ve cisim içinde ısı üretimi olmaması kaydıyla- dikdörtgen prizma veya yarısonsuz dikdörtgen çubuk gibi geometrilerde üç boyutlu problemlere çözüm oluşturmakta da kullanılabilir .

- Böylesi çok boyutlu geometrilerde çözüm, ara kesiti çok boyutlu geometri olan tek boyutlu geometrilerin çözümlerinin çarpımı olarak ifade edilebilir.



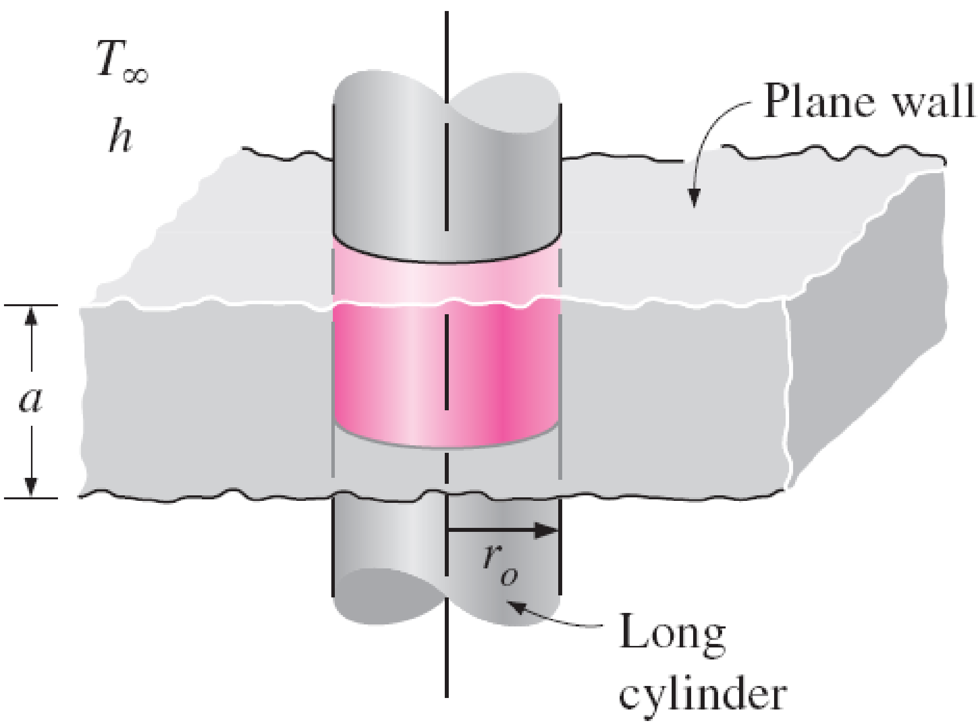
(a) Long cylinder (b) Short cylinder (two-dimensional)

Yarıçapı r0 ve yüksekliği a olan kısa bir silindir, a kalınlıklı düzlem duvar ile r0 yarıçaplı uzun silindirin ara kesitidir.

Çok boyutlu bir geometri için çözüm, ara kesitleri çok boyutlu cisim olan tek boyutlu geometrilerin çözümlerinin çarpımıdır.

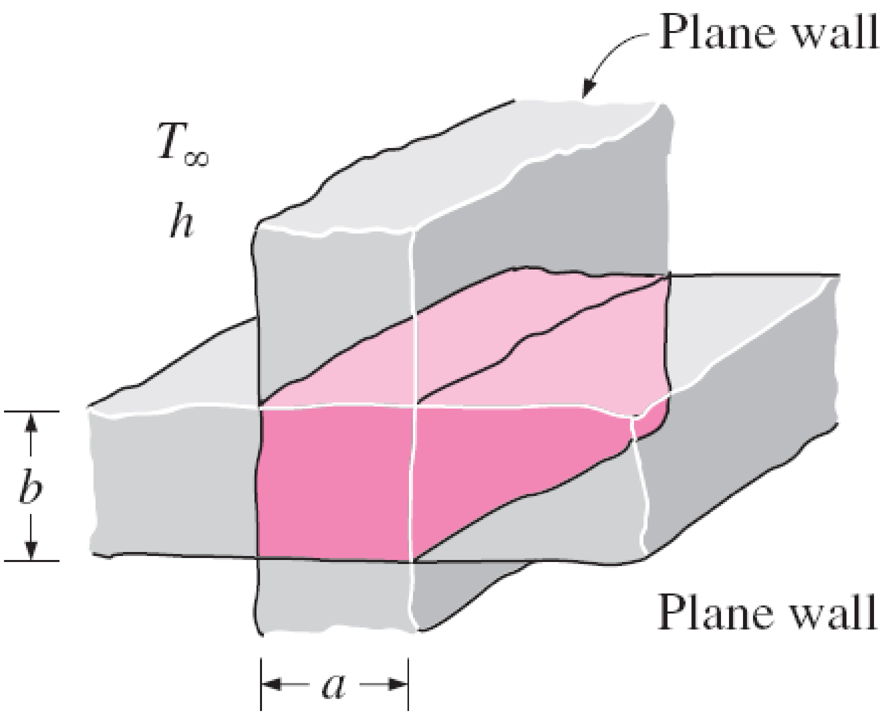
Yüksekliği a ve yarıçapı r0 olan iki boyutlu kısa bir silindir için çözüm, a kalınlıklı tek boyutlu düzlem duvar ile r0 yarıçaplı uzun silindir için boyutsuz çözümlerin çarpımına eşittir.

$$\left(\frac{T(r,x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\substack{\text{short}\\ \text{cylinder}}}=\left(\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\substack{\text{plane}\\ \text{wall}}}\left(\frac{T(r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\substack{\text{infinite}\\ \text{cylinder}}}$$



Yarıçapı r0 ve yüksekliği a olan kısa bir silindir, a kalınlıklı düzlem duvar ile r0 yarıçaplı uzun silindirin ara kesitidir.

$$\left(\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{rectangular}\\ \text{bar}}} = \theta_{\text{wall}}(x, t)\theta_{\text{wall}}(y, t)$$



$$\theta_{\text{wall}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{plane}\\ \text{wall}}}$$

$$\theta_{\text{cyl}}(r, t) = \left(\frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{infinite}\\ \text{cylinder}}}$$

$$\theta_{\text{semi-inf}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{semi-infinite}\\ \text{solid}}}$$

a x b dikdörtgen kesitli uzun katı bir çubuk, kalınlıkları a ve b düzlem duvarlarının ara kesitidir.

1 ve 2 gibi tek boyutlu iki geometrinin ara kesitlerinin oluşturduğu iki boyutlu bir geometri için zamana bağlı ısı iletimi

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 2D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]$$

1,2 ve 3 gibi tek boyutlu üç cismin ara kesitlerinin oluşturduğu üç boyutlu bir cisim için zamana bağlı ısı iletimi

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 3D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]$$

$$+ \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2\right]$$