A.Ü. Beypazarı MYO
İstatistik Dersi

Ünite 4

Basit Serilerde Dağılım Ölçülerinin Hesaplanması

Dr. Mustafa Cumhur AKBULUT

Ünitede Ele Alınan Konular

4. Basit Serilerde Değişkenlik Ölçülerinin Hesaplanması
    - 4.1. Değişim Aralığı
    - 4.2. Ortalama Mutlak Sapma (OMS)
    - 4.2. Varyans ve Standart sapma
    - 4.3. Değişim Katsayısı

Örnek

İki öğrenci Bir dönemde 5 ders almışlar

Ahmet

$\bar{X} = 70$ 50 90 50 70 90

Mehmet

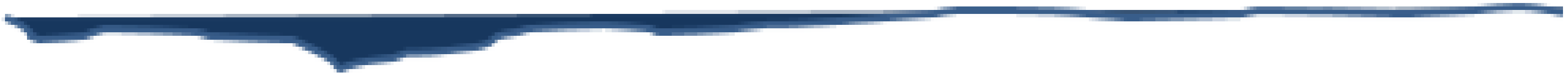
$\bar{X} = 70$ 60 80 70 70 70

Örnek

İki derenin ortalama derinliği verilmiştir.

$\bar{X} = 20\ cm$

$\bar{X} = 20\ cm$

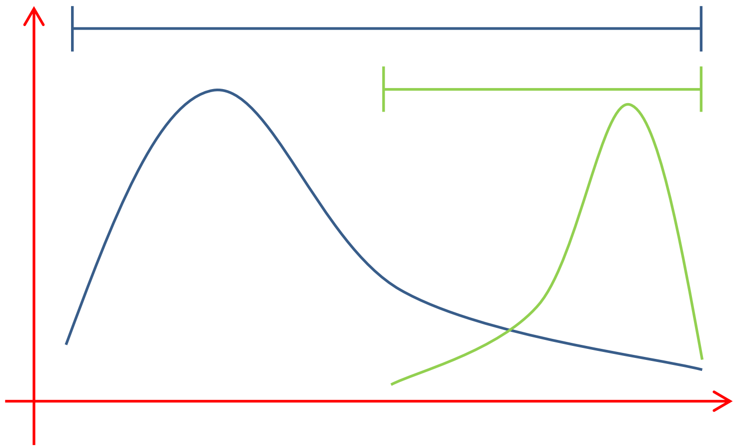


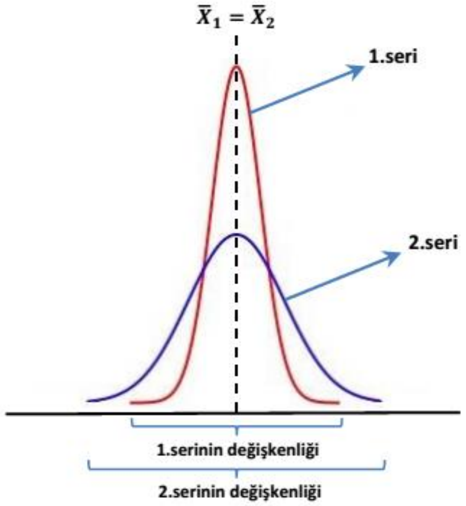
Basit Serilerde Değişkenlik Ölçülerinin Hesaplanması

Bir veri setinin özetlenmesinde, veri yapısının ortaya çıkarılmasında **ortalama** tek başına **yeterli olmaz**.

Bunun yanı sıra verinin nasıl dağıldığının bir ölçüsü olan değişkenlik (Dağılım) ölçülerinin de hesaplanması gerekir.

Dağılım ölçüleri, bir seriyi oluşturan verilerin değer itibariyle birbirinden ya da ortalamadan uzaklıklarını(**sapmalarını**) dikkate alarak, seriyi oluşturan değerlerin nasıl yayıldığını **sayısal** olarak ifade eder.





Değişim aralığı

Değişim aralığı, dağılım ölçüleri içerisinde en basit olanıdır. Bir seride en büyük değer ile en küçük değer arasındaki fark, değişim aralığını verir.

Değişim aralığı matematiksel ifade ile

Değişim Aralığı = $X_{max} - X_{min}$ şeklinde gösterilir.

X_{max} = Serideki en büyük değer.
X_{min} = Serideki en küçük değer.

Değişim aralığı uygulamada aynı ölçü birimi ile ölçülmüş ve az sayıda birim içeren küçük örneklerin değişkenlik açısından karşılaştırılmasında kullanılır.

Hesaplanması ve yorumlanması kolay olmasına rağmen değişim aralığı, serideki en büyük ve en küçük değerler (**uç değerler**) kullanılarak hesaplandığından uç değerlere karşı duyarlıdır.

Bu durum Değişim aralığının zayıf bir dağılım ölçüsü olmasına neden olur.

Örnek

Y: 1,7,4,3,7,8,5,4,7

Çözüm

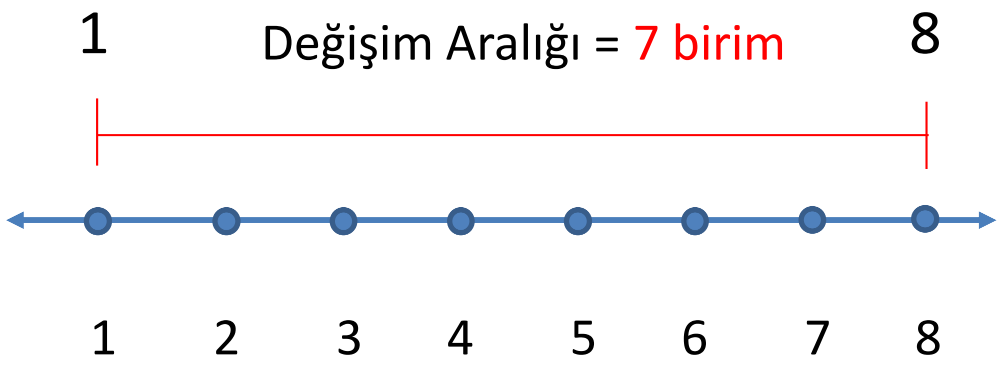
$Y_{max} = 8$

$Y_{min} = 1$

Değişim Aralığı = $Y_{max} - Y_{min}$

Değişim Aralığı = 8-1

Değişim Aralığı = 7



Örnek

Bir sigorta şirketinde deprem sigortası pazarlayan Ahmet ve Mehmet adlı iki çalışanın bir hafta boyunca günlük satışları aşağıda verilmiştir. Ortalama ve değişkenlik ölçüleri kullanarak verileri değerlendiriniz.

Ahmet Bey (X):	11	13	12	15	12	14	14	$\Sigma x=91$
Mehmet Bey (Y):	17	14	6	12	20	9	13	$\Sigma y=91$

Çözüm

Ahmet Bey (X):	11	13	12	15	12	14	14	Σx=91
Mehmet Bey (Y):	17	14	6	12	20	9	13	Σy=91

Önce Ahmet beyin ve Mehmet beyin günlük ortalama satışlarını hesaplayalım.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} X_i}{n} = \frac{91}{7} = 13 \text{ adet}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{7} Y_i}{n} = \frac{91}{7} = 13 \text{ adet}$$

Ancak günlük satış verileri **aynı** ortalamaya sahip olmasına rağmen birbirine benzerlik **göstermemektedir**.

$X_{max} = 15$

$X_{min} = 11$

Değişim Aralığı$_x$ = $X_{max} - X_{min}$

Değişim Aralığı$_x$ = 15-11=4

$Y_{max} = 20$

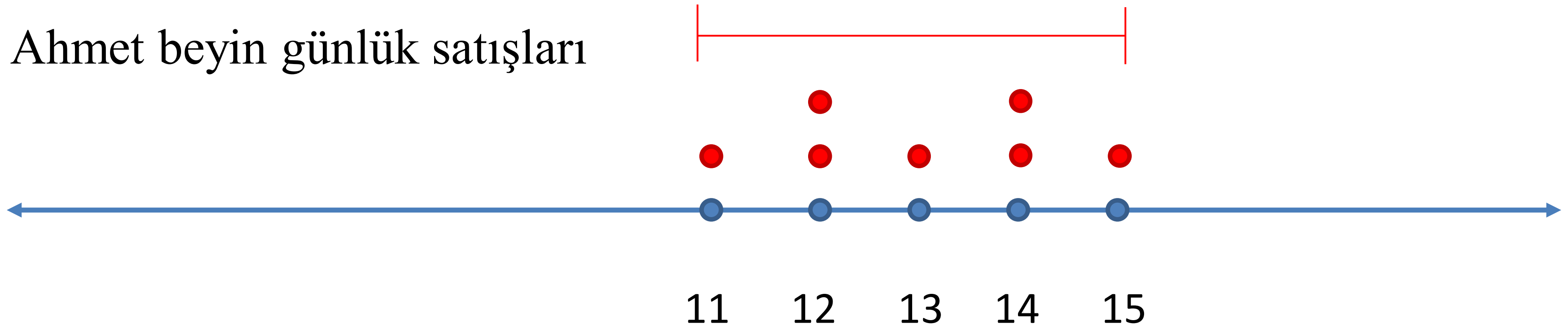
$Y_{min} = 6$

Değişim Aralığı$_y$ = $Y_{max} - Y_{min}$

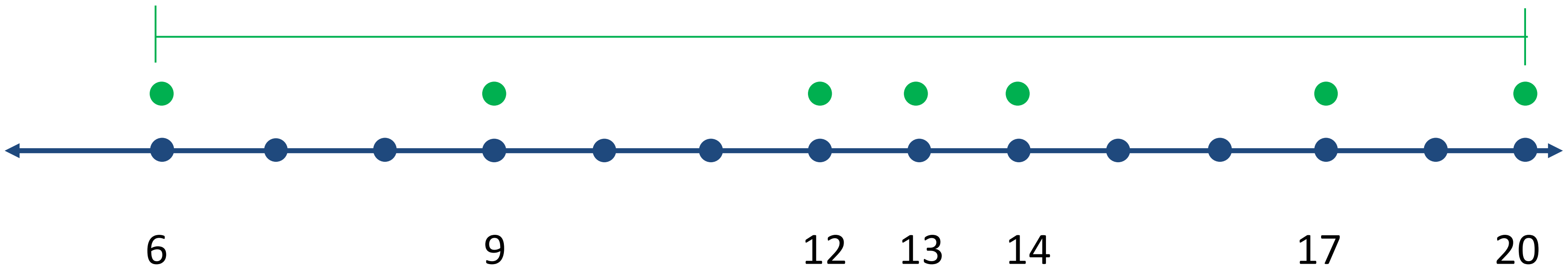
Değişim Aralığı$_y$ = 20-6=14

Ahmet Bey (X):	11	13	12	15	12	14	14	ΣX=91
Mehmet Bey (Y):	17	14	6	12	20	9	13	ΣY=91

Ahmet beyin günlük satışları



Mehmet beyin günlük satışları



Ortalama Sapma (OMS)

OMS, verilerin ortalamaya ne kadar yakın yada uzak olduklarını belirleyen bir ölçüdür. OMS, verilerin ortalamadan sapmalarının mutlak değerlerinin ortalamasıdır.

Matematiksel ifade ile

$$Ortalama\ Sapma = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

OMS

- *Hesaplanması ve anlaşılması kolaydır.*
- *Medyandan sapmalar şeklinde de hesaplanabilir*
- *Aykırı ve uç değerlerden SS kadar etkilenmez*
- *Matematiksel işlevlere uygun değildir.*

Örnek

y: 1,7,4,3,7,8,5,5 serisinde ortalama sapmayı hesaplayınız.

Çözüm

$$Ortalama\ Sapma = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{n} \qquad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} \qquad \bar{x} = \frac{40}{8} = 5$$

$$OMS = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$OMS = \frac{|1-5| + |7-5| + |4-5| + |3-5| + |7-5| + |8-5| + |5-5| + |5-5|}{8}$$

$$OMS = \frac{14}{8} \qquad OMS = 1{,}75$$

Varyans ve Standart Sapma

En yaygın kullanılan dağılım (değişkenlik) ölçüsüdür.

Bir serideki değerlerin aritmetik ortalamadan farklarının kareleri toplamının değer sayısına oranına varyans denir.

Başka bir ifadeyle (ortalamadan) **sapma kareleri ortalamasına** ‘’**varyans**’’ denir.

Varyans örnekten hesaplanıyorsa **S²** ile; yığından hesaplanıyorsa **σ²** ile gösterilir.

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \qquad \sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu_X)^2}{N}$$

Standart Sapma ise hesaplanan Varyansın karekökü alınarak bulunur.

Soru

X: *1, 4, 8, 10, 12* Verilen serinin Varyansını hesaplayınız.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Çözüm

n= 5 Varyansı hesaplayabilmemiz için önce serinin ortalamasını bulmalıyız.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{n} = \frac{1+4+8+10+12}{5} = \frac{35}{5}$$ ve $\bar{X} = 7$

Bulduğumuz ortalamayı varyans formülünde yerine koyalım.

$$S_x^2 = \frac{(1-7)^2 + (4-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2 + (12-7)^2}{5-1}$$

$$S_x^2 = \frac{(-6)^2 + (-3)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (5)^2}{4}$$

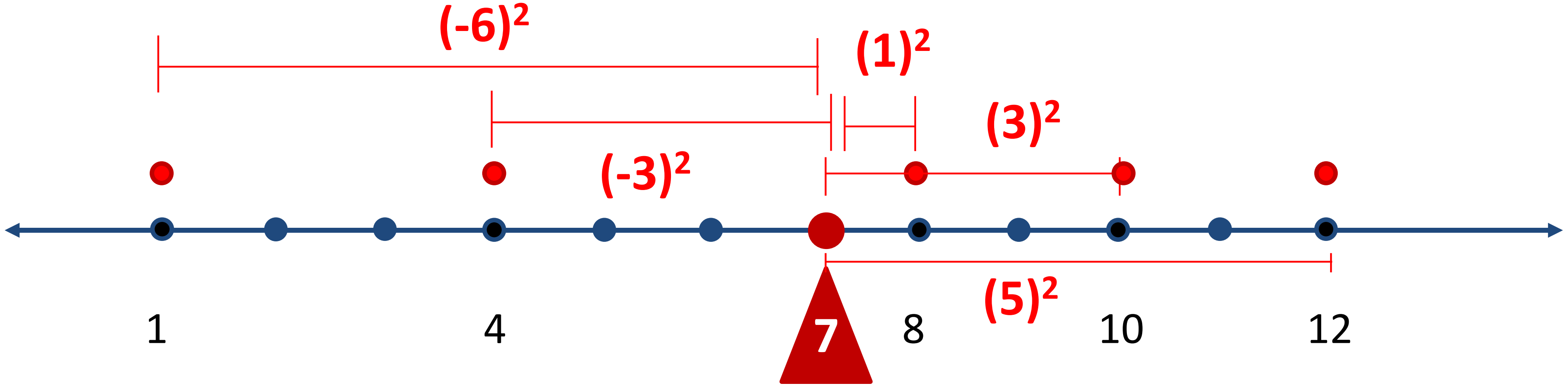
$$S_x^2 = \frac{36+9+1+9+25}{4}$$

$$S_x^2 = \frac{80}{4}$$

$$S_x^2 = 20$$

Varyans Grafiksel Gösterim

X:	1	4	8	10	12



$$S_x^2 = \frac{(-6)^2 + (-3)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (5)^2}{4} \qquad S_x^2 = \frac{36+9+1+9+25}{4} \qquad S_x^2 = \frac{80}{4} \qquad S_x^2 = 20$$

Varyans Formülleri

1

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

2

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

3

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n * \overline{X}^2}{n-1}$$

Örnek

Z:2,3,7 ise Z değişkeninin varyansını bulunuz.

Çözüm

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

n= 3 Soruyu 2 numaralı formülü kullanarak çözelim.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 = 4 + 9 + 49 = 62$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = (2+3+7)^2 = (12)^2 = 144$$

$$S_x^2 = \frac{62 - \frac{144}{3}}{2}$$

$$S_x^2 = \frac{62-48}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Soru

6 adet verinin bulunduğu bir seride kareler toplamı 310 ve ortalama 7 olduğuna göre varyansı bulunuz.

Çözüm

n= 6

Soruda kareler toplamı ve ortalama verildiğinden Varyansı hesaplayabilmemiz için 3 numaralı formülü kullanabiliriz.

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n * \overline{X}^2}{n-1}$$

$$S_X^2 = \frac{310 - 6*49}{5}$$

$$S_X^2 = \frac{310 - 294}{5}$$

$$S_X^2 = \frac{310 - 6*(7)^2}{6-1}$$

$$S_x^2 = \frac{16}{5}$$

$$S_x^2 = 3,2$$

Soru

Daha önce çözdüğümüz ve varyansı 20 olarak bulduğumuz bu soruyu kısa formül ile çözelim.

X:	1	4	8	10	12

Çözüm

n= 5 Varyansın formülünü yazalım.

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 1^2 + 4^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 = 1 + 16 + 64 + 100 + 144$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 325$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)^2 = (1+4+8+10+12)^2 = (35)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = 1225$$

$$S_X^2 = \frac{325 - \frac{1225}{5}}{5-1} \qquad S_X^2 = \frac{325 - 245}{4} \qquad S_X^2 = \frac{80}{4} \qquad S_x^2 = 20$$

Örnek

Örnek 4–2 deki iki satış elemanının satışlarına ilişkin Varyansları ve standart sapmaları bulalım.

Çözüm

Ahmet Bey (X):	11	13	12	15	12	14	14	ΣX=91
Mehmet Bey (Y):	17	14	6	12	20	9	13	ΣY=91

Önce Ahmet beyin satış verilerine ilişkin varyansı ve standart sapmayı hesaplayalım.

$\bar{X} = 13$ adet olarak bulunmuştu.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+(X_3-\bar{X})^2+(X_4-\bar{X})^2+(X_5-\bar{X})^2+(X_6-\bar{X})^2+(X_7-\bar{X})^2}{n-1}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(11-13)^2+(13-13)^2+(12-13)^2+(15-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2+(14-13)^2}{7-1}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(-2)^2+(0)^2+(-1)^2+(2)^2+(-1)^2+(1)^2+(1)^2}{6} \qquad S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{4+0+1+4+1+1+1}{6}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{12}{6} \qquad S_x^2 = 2$$

Standart sapma ise; $\sqrt{S_x^2} = \sqrt{2}$ $\quad S_x = 1,41$ Adet olarak bulunur.

Mehmet Bey (Y):	17	14	6	12	20	9	13	ΣY=91

$\overline{Y} = 13$ adet olarak bulunmuştu.

Şimdide Mehmet beyin satış verilerine ilişkin varyansı ve standart sapmayı hesaplayalım.

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1} = \frac{(Y_1-\overline{Y})^2 + (Y_2-\overline{Y})^2 + (Y_3-\overline{Y})^2 + (Y_4-\overline{Y})^2 + (Y_5-\overline{Y})^2 + (Y_6-\overline{Y})^2 + (Y_7-\overline{Y})^2}{n-1}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1} = \frac{(17-13)^2 + (14-13)^2 + (6-13)^2 + (12-13)^2 + (20-13)^2 + (9-13)^2 + (13-13)^2}{7-1}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1} = \frac{(4)^2 + (1)^2 + (-7)^2 + (1)^2 + (7)^2 + (-4)^2 + (0)^2}{6} = \frac{16+1+49+1+49+16+0}{6} = \frac{132}{6} \qquad S_y^2 = 22$$

Standart sapma ise; $\sqrt{S_y^2} = \sqrt{22}$ $\quad S_y = 4,69$ Adet olarak bulunur.

$$S_x = 1,41 \text{ Adet}$$

$$S_y = 4,69 \text{ Adet}$$

Ahmet beyin satışlarına ilişkin standart sapma 1,41 adet olarak bulunmuştu. Mehmet beyin ise 4,69 adet olarak bulunmuştur.

Bu ölçülere bakarak Ahmet beyin günlük satışlarındaki değişimin daha az olduğu yani günlük satış adetlerinin genelde birbirine (dolayısıyla ortalama satış adedine) yakın, benzer rakamlar olduğu;

Mehmet beyin günlük satışlarındaki değişimin ise daha fazla olduğu söylenebilir.

Değişim Katsayısı

Farklı ölçü birimleri ile (**TL, kg, cm vb**.) ölçülmüş değişkenlerin veya aynı ölçü birimi ile ölçülmüş fakat ortalamalar bakımından büyük **farklar** içeren değişkenlerin **dağılımlarının karşılaştırılmasında** direkt standart sapma kullanılmaz.

Bunun yerine ölçü biriminden bağımsız ve ortalamanın etkisinden arındırılmış bir ölçü kullanılır.

Bunun için serilerin standart sapmaları **kendi ortalamalarının yüzdesi** olarak ifade edilirse gözlem değerlerinin büyüklüklerinden ve birimlerden kaynaklanan farklılıklar ortadan kalkar. Bu ölçüye **Değişim katsayısı** denir. Değişim Katsayısı **Oransal** bir değişkenlik ölçüsüdür.

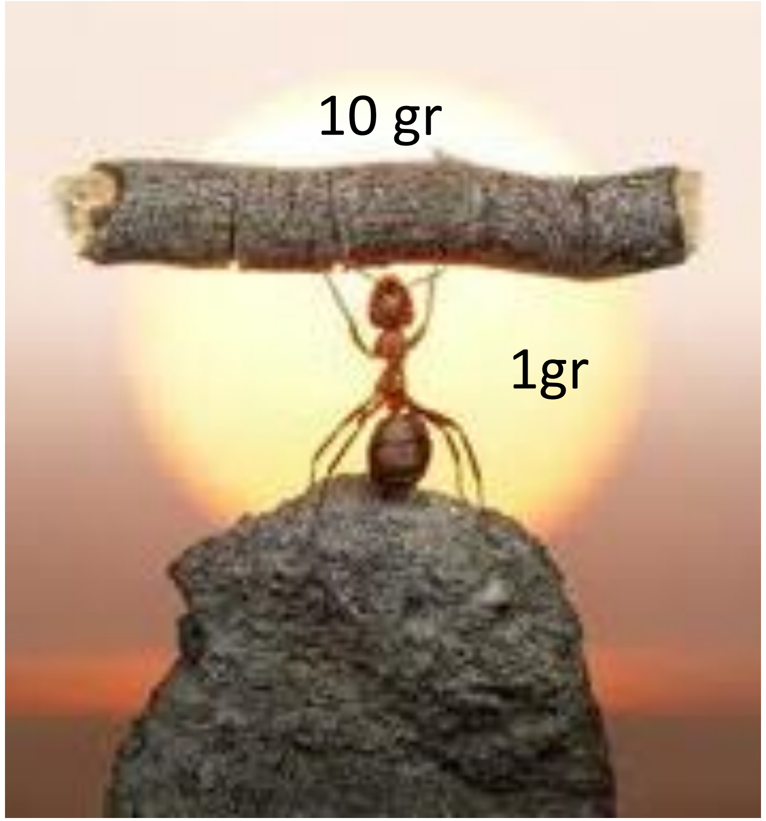
Değişim Katsayısı

Değişim Katsayısı, verilerin standart sapmasının ortalamaya oranı olarak tanımlanır ve yüzde olarak ifade edilir.

$$\text{Değişim Katsayısı } (\text{D.K.}) = \frac{S_x}{\overline{X}}$$

Değişim katsayısı hangi seride **yüksek** ise o seride değişkenlik **daha fazladır**. Seride negatif değerler var ise hesaplanan değişim katsayısının bir anlamı yoktur.

Hangisi daha güçlü?



$$\frac{10\ gr}{1\ gr}=10$$

$$\frac{180000\ gr}{60000\ gr}=3$$

Soru

Bir sigorta şirketine 3 aylık dönemde kaza yapan yerli araçların ortalama hasarı 300 TL ve standart Sapması 60 TL; kaza yapan yabancı araçların ortalama hasarı 900 TL ve standart Sapması 90 TL olarak hesaplanmıştır. Hasarlar bakımından hangi araç grubunda değişkenlik daha fazladır?

	Ortalama	Std. Sapma
Yerli Araç(X)	300 TL	60 TL
Yabancı Araç (Y)	900 TL	90 TL

Çözüm

Yerli araçların hasar tutarını X ile yabancı araçların hasar tutarını ise Y ile gösterelim.

	Ortalama	Std. Sapma
Yerli Araç(X)	300 TL	60 TL
Yabancı Araç (Y)	900 TL	90 TL

$$D.K._X = \frac{S_x}{\bar{X}}$$

$$D.K._X = \frac{60}{300} = 0,20 \text{ yada } \%20$$

$$D.K._Y = \frac{S_Y}{\bar{Y}}$$

$$D.K._Y = \frac{90}{900} = 0,10 \text{ yada } \%10$$

Değişim katsayılarına bakıldığında **yerli araçlara** ilişkin hasar tutarlarında gözlenen değişkenliğin **daha fazla** olduğu görülmektedir.

Örnek

Ülkemizin büyüme göstergeleri

Büyüme Oranındaki Düşüş ve Oynaklık Artışı: 2002Q2-2013Q4 ve 2016Q3-2021Q2 Mukayesesi:

Son 18 yıllık dönemdeki ara dönem büyüme açısından öne çıkmakta. 2002Q3-2013Q4 ve 2016Q3-2021Q2. İlk dönemden ikinciye sadece büyüme oranı aşağı gelmiyor; hem büyümenin, hem de büyümeye katkı yapan kalemlerin oynaklıklarında olağanüstü artışlar gözlemleniyor.

	HH Tük. Harc.	Kamu Tük. Har.	GS Sabit Ser. Olş.	Stok Dğşm.	İhracat	İthalat (-)	GSYİH
2002Q3-2013Q4							
Ortalama	3.68	0.70	2.86	-0.33	1.66	2.45	6.13
Strd. Sapma	3.34	0.71	3.82	2.02	1.74	3.55	5.14
Varyasyon Kats.	0.91	1.01	1.34	-6.11	1.05	1.45	0.84
2016Q3-2021Q2							
Ortalama	2.30	0.65	0.57	0.22	1.06	0.58	4.25
Strd. Sapma	3.87	0.43	3.36	4.94	4.90	4.66	6.43
Varyasyon Kats.	1.68	0.66	5.92	22.34	4.64	8.09	1.51

Küçük Sınav

Question 1 of 5 | Point Value: 20 | Total Points: 0 out of 100 | 09:54

Aşağıdaki basit serinin varyansı kaçtır?

X:10,18,10,18,10,10,12,24,18,10

- 25,78
- 22
- 15,9
- 16
- 14

Submit All | Previous | Next

Yararlanılan Kaynaklar

1. ÇİL, B. (2000). İstatistik. Ankara: Detay Yayıncılık.
2. ER, F. (2003). Açıklayıcı Veri Analizi. Eskişehir: Kaan Kitapevi.
3. KILIÇKAPLAN, S. (1997). İstatistiğe Giriş I. Ankara: Alkım Yayınevi.
4. M. Akif BAKIR, C. A. (2006). İstatistik. Ankara: Nobel.
5. NEWBOLD, P. (2005). İşletme ve İktisat için İstatistik (Çeviri). İstanbul: Literatür Yayıncılık.
6. SIRIKSARAN, E. (2000). Teori ve Uygulamaları ile İstatistiksel Yöntemler. İstanbul: Sigma.
7. SPIEGEL, M. R. (1995). İstatistik (Çeviri). İstanbul: Bilim Teknik Yayınevi.
8. ŞENESEN, Ü. (2007). İSTATİSTİK Sayıların Arkasını Anlamak. İstanbul: Literatür Yayıncılık.
9. TUİK. (2009 ve 2013). Türkiye İstatistik Yıllığı 2009, 2013. TUİK.