Matris ve Determinant

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \quad \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \dots a_{sn} \end{bmatrix}$$

şeklinde, bir kümenin elemanlarının sıralı bir tablosuna sxn türünde bir matris denir. Bu kitapta elemanları reel sayılar olan matrisler üzerinde durulacaktır.

$[a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13} \dots\ a_{1n}]$, $[a_{21}\ \ a_{22}\ \ a_{23} \dots\ a_{2n}]$, ... $[a_{m1}\ \ a_{m2}\ \dots\ a_{mn}]$

vektörlerine A matrisinin satırları,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

vektörlerine bu matrisinin sütunları (kolonları) denir. m tane satırı ve n tane sütunu olan A matrisi

$A = \left[a_{ij} \right]$, i = 1, 2, 3, …, m ve j = 1, 2, 3, …, n ya da kısaca $A = \left[a_{ij} \right]_{mxn}$

Şeklinde gösterilebilir.

NOT: Tüm elemanları sıfır olan matrislere **sıfır matrisi** denir. O ile gösterilir.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ birer sıfır matrisidir.

NOT: Satır ve sütun sayıları eşit olan matrise **kare matris** denir.

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin 2 tane satırı ve 2 tane sütunu vardır.

Bu nedenle matris, 2 x 2 türünde bir kare matristir.

NOT: Asal köşegen üzerinde bulunmayan tüm elemanları sıfır olan bir kara matrise **köşegen matris** adı verilir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 04 & \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisleri birer köşegen matristir.

Bir köşegen matriste asal köşegen üzerindeki tüm elemanlar 1 ise bu köşegen matrise bir **birim matris** adı verilir. Örneğin,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ birer birim matristir.

Bir kare matrisin asal köşegen <u>*üstündeki*</u> tüm elemanları sıfır ise bu matrise bir **alt üçgensel matris**, asal köşegen <u>*altındaki*</u> tüm elemanlar sıfır ise bu matrise bir **üst üçgensel matris** adı verilir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bir alt üçgensel matris — Bir üst üçgensel matris

Bir Matrisin Bir Sayı İle Çarpılması

A bir matris ve $k \in \mathbf{R}$ olsun. kA matrisi A matrisinin her elemanının k sayısı ile çarpılmasıyla elde edilen matristir.

NOT: $(-1) \cdot A = -A$ matrisine A nın toplama işlemine göre tersi denir.

Matrislerin Eşitliği

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ ve $B = [b_{ij}]_{mxn}$ olsun. i ve j nin her değeri için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ile B matrisleri eşittir denir. A ile B matrisi eşit ise bu $A = B$ biçiminde yazılır.

Matrislerin Toplanması Ve Çıkarılması

A ve B aynı türden olan iki matris olsun. A + B, A ile B nin karşılıklı elemanları toplanarak elde edilen matristir. $A - B = A + (-B)$ dir. Buna göre, A – B matrisi, A nın elemanlarından ona karşılık gelen B nin elemanlarının çıkarılmasıyla elde edilir.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri için 2A – 2B matrisini hesaplayınız.

$2A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $2B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ olacağından $2A - 2B = \begin{bmatrix} 2-0 & -6-4 & 8-2 \\ 4-4 & 2-2 & -2-6 \end{bmatrix}$

$2A - 2B = \begin{bmatrix} 2-0 & -6-4 & 8-2 \\ 4-4 & 2-2 & -2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

NOT: A ve B, mxn türünde iki matris ise, A + B ve A – B de mxn türünde birer matristir.

Toplama İşleminin Özellikleri

A, B, C mxn türünde üç matris olsun.

1. A + B = B + A dır. (Değişme özeliği)
2. (A + B) + C = A + (B + C) dir. (Birleşme özeliği)
3. mxn türündeki sıfır matrisi toplama işlemine göre birim elemanıdır:

   $$A + 0 = 0 + A = A$$

4. A + (–A) = –A + A = 0 dır.

Matrislerde Çarpma

A matrisi mxn türünde, B matrisi nxp türünde olsun. A.B, mxp türünde bir matristir. c_{ij} , A.B nin bir elemanı ise, bu eleman, A nın i. satır vektörü ile B nin j. sütun vektörünün skaler (iç) çarpımına eşittir.

NOT: Genel olarak (A ve B aynı türden birer kare matris olsalar bile) A . B ≠ B . A olabilir.

Çarpma işleminin Özellikleri

1. A, B, C sırasıyla mxn, nxp, pxr türünde üç matris ise,
   (A . B) . C = A . (B . C) dir (Birleşme özeliği).

2. A, mxn türünde, B ve C, nxp türünde üç matris ise,
   A.(B +C) = A.B + A.C dir (Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği).

3. nxn türün $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ matrisi, nxn türündeki matrislerde çarpma işleminin birim

elemanıdır. Başka bir yazılışla

$$A.I_n = I_n . A = A$$

olur.

$A.A = A^2$, $A^2. A = A^3$, ..., $A^{n-1}. A = A^n$ ile gösterilir.

Bir Matrisin Çarpma İşlemine Göre Tersi

A, n x n türünde bir matris olsun.

$A . B = B . A = I_n$

koşulunu sağlayan bir B matrisi varsa, B matrisine A nın çarpma işlemine göre tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. A^{-1} matrisi de nxn türündedir.

NOT: 2x2 türündeki matrisler için aşağıdaki yoldan bulunabilir

1. A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dir.

Eğer ad – bc ≠ 0 ise, A^{-1} vardır. ad – bc = 0 ise A^{-1} yoktur.

2. A, nxn türünde bir matris olsun. A^{-1} varsa A ya tekil (singüler) olmayan matris, A^{-1} yoksa A ya tekil (singüler) matris denir.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ için A^{-1} matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM

A =$A = \frac{1}{0.1-1.3}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$

Olur.

ÖRNEK

$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ koşulunu sağlayan A matrisini bulunuz?

B = $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. $B^{-1} = \frac{1}{-6+5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ olur.

Verilen eşitliğin iki yanı B^{-1} ile soldan çarpılırsa

$$B^{-1}.(B.A) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (B.B^{-1}).A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$ bulunur.

Bir Matrisin Devriği (Transpozu)

A, mxn türünde bir matris olsun. A nın satırları sütun ve sütunları satır yapılarak elde edilen matrise A nın devriği ya da transpozu denir ve A^t ya da A^d ile gösterilir.

DETERMİNANT

A, bir kare matris olsun. A nın determinantı detA ya da $|A|$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

a) $A = [a_{11}]$ şekilnde 1x1 türünde bir matris ise, $|A| = a_{11}$

b) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ şeklinde 2x2 türünde bir matris ise $|A| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

c) A, nxn türünde bir matris olsun. A nın i. satırı ve j. sütunu silinerek elde edilen (n – 1) x (n – 1) türündeki matrisi M_{ij} ile gösterelim. $|M_{ij}|$ determinantına a_{ij} elemanının **minörü**, $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ ye, a_{ij} nin **eş çarpanı (kofaktörü)** denir.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_2 A_2 + \dots a_{in} A_{in}$$ (i– ninci satıra göre açılım)

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots a_{nj} A_{nj}$ (j – ninci sütuna göre açılımı) dır.

d) nxn türündeki reel matrisler kümesinden **R** ye, $A \to D(A) = |A|$ şeklinde tanımlanan D fonksiyonuna **determinant fonksiyonu** adı verilir.

Sarrus Kuralı

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı alt tarafa ilk iki satır, ya da sağ tarafa ilk iki sütun yazılarak hesaplanabilir.

$$\begin{array}{ccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ - & a_{41} & a_{42} & a_{43} & + \\ - & a_{51} & a_{52} & a_{53} & + \\ - & & & & + \end{array}$$

$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{23}\, a_{32}\, a_{11} - a_{33}\, a_{12}\, a_{21}$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$-\quad -\quad -\qquad\qquad +\quad +\quad +$

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Bu kurala Sarrus Kuralı denir. Sarrus kuralı sadece 3x3 tipindeki determinantlar için geçerlidir.