Lineer Denklem Sistemlerinin Matrislerle Gösterilmesi

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ (1)

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

biçimindeki üç bilinmeyenli üç denklemli bir lineer denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada elde ettiğimiz matrislerden

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

matrisine katsayılar matrisi ve sabitlerin de katsayı matrisine dahil edilmesi ile elde edilen

$$A|D = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right] (4)$$

matrise **arttırılmış matris** denir.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_n \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ M \\ d_n \end{bmatrix}$ olmak üzere $A.X = D$ (5) şeklinde yazmak mümkündür.

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ters Matris Metodu

Yukarıda elde edilen (5) nolu $A.X = D$ matris denkliğini alıp, bilinmeyen olan X'i yalnız bırakmaya çalışalım. Her iki taraf A^{-1} ters matrisi ile çarpıldığında

$$(A^{-1}.A).X = A^{-1}.D$$

olur. $A^{-1}.A = I_n$ ve $I_n.X = X$ olduklarından (I_n birim matris olup, cebirdeki 1'in karşılığı, yani çarpmada etkisiz eleman)

$$X = A^{-1}.D \quad \text{veya}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} . \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

bulunur. Matrislerin eşitliğinden

$$x_1 = e_1 , \qquad x_2 = e_2 , \ \ldots \ , x_n = e_n$$

yazılarak, verilen lineer denklem sistemindeki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenleri çözülmüş olur.

Bu çözüm metodunda katsayı matrisinin tersi, ya bilinmeli veya bulunmalıdır. Üç veya daha fazla mertebeden matrislerin terslerini bulmak fazla zaman aldığından bu metodu sadece 2×2 tipinden matrisler, bir başka deyişle 2 bilinmeyenli lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanacağız. Çünkü 2×2 tipindeki bir matrisin tersi için standart bir biçim olarak biliyoruz ki, $|A| \neq 0$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gibi bir matrisin tersi olan matris;

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

olarak alınabilir.

Cramer Metodu

Üç bilinmeyenli bir denklem sistemini inceleyelim.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

yani

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Böyle bir sistemin Cramer metoduna göre çözümü :

$x = Dx / D$, $y = Dy / D$, $z = Dz / D$ ($D \neq 0$ olmak şartı ile)

kullanılarak bulunur.

Burada D katsayılar matrisinin determinantını Dx katsayı matrisindeki x katsayıları yerine c vektörünü koyarak elde edilen matrisin determinantını, Dy aynı şekilde y katsayıları yerine c vektörü ve Dz, z katsayıları yerine c vektörü konarak elde edilen matrisin determinantını gösterir, yani ;

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad Dx = \begin{bmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$Dy = \begin{bmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad Dz = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{bmatrix}$$

Yine bilinmeyen sayısı arttığında determinantı bulmak güçleştiği için, uygun metot seçilerek çözüm bulunur. Yine hatırlatalım ki, bilgisayar söz konusu olduğu durumlarda, bilinmeyen sayısı önemli olmayıp çözüm mantığı bilgisayara verildiğinde veya hazır programlarla matrislerin çarpımı ve tersi bulunabildiğinde bize düşen sadece katsayı matrisini veya arttırılmış matrisi elde edip, bilgisayar ortamına bilgileri aktarmaktadır.

Şimdi şu ana kadar verilen tanımları ve en son denklem çözümlerini içine alan çözülmüş problemlerle konuları pekiştirmeye çalışalım.

* **Örnek**

$3x+5y = 23$

$7x-2y = 81$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm :

Katsayı matrisi

$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ olup, $|A| = -41 \neq 0$, $A^{-1} = -1/41\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ bulunur.

$A^{-1}A.x = A^{-1}.B$ denkliğinden

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 23 \\ 81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/41 & 5/41 \\ 7/41 & -3/41 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 \\ 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix}$$

yani x=11 ve y=-1 olarak bulunur.

* **Örnek**

$3x-2y = 7$ denklem sistemini çözünüz.

$5x+3y = -1$

Çözüm :

Cramer metodu ile çözülürse;

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 19 \text{ ve } x = Dx / D = 19 / 19 = 1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -38 \text{ ve } y = Dy / D = -38 / 19 = -2$$

olarak bulunur.

Örnek

x+y+2z = 7

x-y-3z = -6 denklem sistemini Cramer metodu ile çözünüz.

2x+3y+z = 4

Çözüm :

$$\text{Verilen sistemde } |D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \quad Dx = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & -6 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 33$$

Buradan x = Dx/D = 22/11 = 2 , y = Dy/D = -11/11 = -1 ve z = Dz/D = 33/11 = 3 bulunur.

Denk matrisler kullanılarak çözüm:

Lineer denklem sistemi kullanılarak katsayı matrisi ve arttırılmış matris elde edilir. Arttırılmış matris kullanılarak elemanter satır işlemleri (bir satırı reel bir sayı ile çarpıp diğer paralel satıra eklemek) uygulanarak elde edilen denk sistemler kullanılır ve sistem öyle bir hale gelir ki, mesela;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \end{array}\right] \qquad (1)$$

durumuna gelen arttırılmış matrisin ifadesi şudur:

$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$

$3x_2 - 3x_3 = -3$

$9x_3 = -18$

Buradan $x_3 = -2$

$3(x_2) - 3(-2) = -3 \rightarrow x_2 = -3$

$2(x_1) - (-3) + 2(-2) = 3 \rightarrow x_1 = 2$

olarak bilinmeyen kolayca bulunur.

Bu metotta amaç arttırılmış matrisi (1) nolu gibi bir matris haline dönüştürmek için satır işlemlerini uygulamaktır. Arttırılmış matris ve satır işlemlerini üç işlem olarak verebiliriz.

1. Herhangi iki satırın yeri değişebilir.
2. Herhangi bir satır K gibi sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılır.
3. K gibi bir sayı ile çarpılan satır diğer satırın elemanlarına karşılıklı eklenir.

Örneğin,

3I+II ifadesi, birinci satır elemanlarının 3 ile çarpılıp ikinci satırın karşılık gelen elemanları ile toplanacağını belirtir.

II$\rightarrow$ III ifadesi ise 2. Satır ile 3. Satır yer değişecektir demektir. Bunları çözülen örneklerde tekrar hatırlatacağız.

Örnek

$-3x+y = 4$

$-x+y = 8$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm :

Denk matrisler kullanarak çözümün ne kadar kolay ve çabuk olduğunu görelim. Arttırılmış matris;

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 8 \end{array}\right] (-3.II+I) \quad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -20 \end{array}\right]$$

bu matriste

$-2y = -20$ ise $y = 10$ ve $-3x+10 = 4$ den $x = 2$ olduğu kolayca bulunur.