Geometrik Cisimlerin Hacimleri

Uzayda yer kaplayan (üç boyutlu) nesnelere cisim denir. Düzgün geometrik cisimlerin hacimleri bağıntılar yardımıyla bulunur. Eğer cisim düzgün değilse cismin hacmi cismin kütlesinin (terazi ile tartılan değer) cismin özkütlesine bölünmesi ile bulunur. Her cismin özkütlesi (yoğunluk) o cismin cinsini belirleyen ayırtedici bir özelliktir.

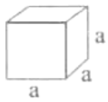
$V = \frac{m}{d}$, (V = hacim, m = kütle, d = özkütle)

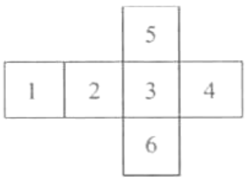
Bu bağıntı $V = \frac{G}{p}$ — olarak da yazılabilir G: ağırlık (yerçekimi kuvveti)

G = mg p = özgül ağırlık p = dg dir.

Eğer cismin şekli düzgün ise, hacmi üç boyutlu düzlemde hesaplanır.

Küp: Bütün kenarları birbirine eşit oluşan üç boyutlu cisme küp denir. Kübün hacmi $V = a^3$ dür. Kübün açılımı gösterilirse 6 tane eşit alan vardır. Her bir alan $A_1 = a^2$ dir. Toplam alan $A = 6 A_1 = 6a^{?}$ dir.



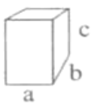


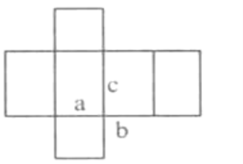
Dikdörtgenler Prizması

Eğer kenarlar birbirinden farklı ise; [a, b, c] böyle prizmalara dikdörtgenler prizması denir. Dikdörtgen prizmasının hacmi: V = a.b.c dir.

Dikdörtgen prizmasının 6 yüzü vardır. İkişer ikişer birbirine eşittir.

$A_1 = a . b$ $A_2 = b . c$ $A_3 = a . c$ dir.





Toplam yüzey

$A = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$

$A = 2 (A_1 + A_2 + A_3)$

A = 2 (a - b + b - c + a - c) dir.

Örnek: Ayrıtları (ebatları) 6, 9 ve 14 cm olan dikdörtgenler prizmasının hacmini ve toplam alanını bulunuz.

Çözüm: $V = abc = 6.9.14 = 756\ cm^3$

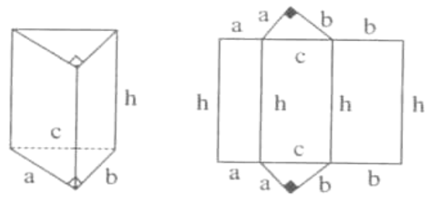
Toplam alanı A = 2 (ab + b • c + a • c)

A = 2 (6 . 9 + 6 . 1 4 + 9 . 1 4)

A = 2 (5 4 + 8 4 + 126)

A = 2 • 264 = 528 cm^2 olur.

Üçgen Prizma: Tabanı üçgen olan prizmaya üçgen dik prizma denir. Açılmış şekli aşağıdaki gibidir.



Bu prizmanın taban alanı (üçgen olduğu için) $A_1 = \dfrac{a \cdot h_1}{2}$

Yanal alanı: Taban çevresi yükseklik

A_1: $(a + b + c) \cdot h$

Tüm alan : A = 2 taban alanı + Yanal alanı

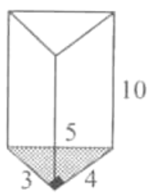
$$A = 2\ \frac{a \cdot h}{2} + (a + b + c) \cdot h$$

Hacmi : V = Taban alanı . yükseklik

$$V = \frac{a \cdot h_1}{2} \cdot h \text{ olur.}$$

Örnek: Kenarları 3, 4 ve 5 cm olan bir üçgen dik prizmanın yüksekliği 10 cm dir. Bu prizmanın hacmini ve toplam alanını bulunuz.

Çözüm: Üçgen dik prizmanın tabanı 3 - 4 - 5 üçgeni olduğundan bir dik üçgendir ve



Taban Alanı = $\dfrac{3 \cdot 4}{2}$ = 6 cm^2 dir. Dik kenarların çarpımının yarısı dır. O halde hacim;

Hacim = Taban Alanı • Yükseklik

= 6 - 1 0

= 60 cm^3 bulunur.

Toplam Alan = 2- + 4 • 10 + 5 • 10 + 3 • 10

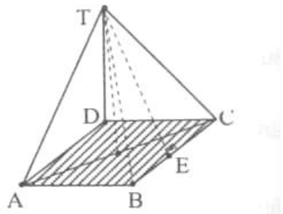
= 12 + 40 + 50 + 30

= 132 cm^2 dir.

Piramit: Tabanı dörtgen (kare veya farklı bir dörtgen) kenar yüzeyleri üçgen olan geometrik şekle piramit denir. Yan yüzeyler eşkenar, ikizkenar veya farklı bir üçgen olabilir.

Piramitin hacmi:

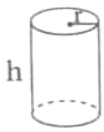
$$V = \frac{Taban\ alanı.\ Yükseklik}{3}$$



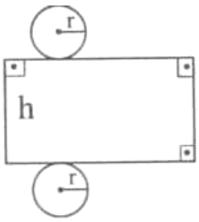
Piramitin bütün alanı:

A = Taban alanı + Yanal alanları

Silindir: Alt ve üst tabanı daire şeklinde olan prizmadır.



Açılmış şekli



Hacmi: V = Taban alanı . yükseklik

$V = \pi r^2 . h$

Bütün alan = Yanal alan + Taban alanı

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$A = 2\pi r.(h + r)$ olur.

Örnek:

Taban yarıçapı 6m, yüksekliği 10 m olan bir silindirin bütün alanını ve hacmini bulunuz ($\pi = 3$).

Çözüm: Tüm alanı: A =2 лr (h + r) л≅3 alınırsa;

A = 2 • 3 • 6 (10+ 2)

A = 432 m^2

Hacmi: V = лr^2 h

V = 3 • $(6)^2$ • 10

V = 1080m^3 olur.

Örnek: Yanal alanı taban alanlarının toplamına eşit olan silindirin yüksekliği 8 m ise; hacmini bulunuz.($\pi = 3$)

Çözüm: Yanal alanı A_1 = 2лrh Taban alanlarının toplamı A_2 = 2лr² dir.

$A_1 = A_2$

2лrh = 2лr², h = r olur, r = 8 m dir.

V= лr² h = 3.(8)² .8 = 3 . 4 . 2 = 1 5 3 6 m³ bulunur.

Örnek: Bir kenarı 24 cm olan kare şeklindeki bir metal levha bükülerek silindir şekline getiriliyor.

a)Silindirin yanal alanını bulunuz.

b)Taban alanını bulunuz.

c)Toplam alanını bulunuz.

d)Silindirin iç hacmini bulunuz.

Çözüm: a) Yanal alanı kareden elde edildiğinden $A_1 = a^2$ = 24.24= 576 cm²

b) Elde edilen silindirin taban çevresi Ç = 2лr dir ve bu karenin bir kenarına eşittir, (yüksekliğine)

2 лr = a = 24

2.3.r = 24 buradan

r = 4 cm bulunur.

c)Toplam alanı A = 2лr (r + h)

A = 2 . 3 . 4 (4+ 24)

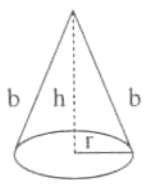
A = 24• 28

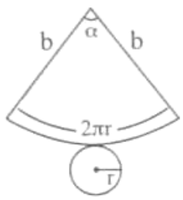
A = 672 cm2

d)Silindirin iç hacmi (içi boş olduğu için böyle denilmektedir, alt ve üst tabanı aynı metalden değildir, boştur).

V= лr²h = 3 . (4)² . 24 = 1152cm³ olur.

Koni: Tabanı çember olmak koşulu ile, bu çemberin düzleminde bulunmayan bir noktayı (A) çemberin tüm noktalarına birleştirmekle oluşan şekle koni, ya da dairesel koni denir.





Taban çevresi ***2лr =*** a dır. $r = \frac{a}{2л}$

Koninin yanal alanı: A_1 = лbr

Tüm alanı: A = лbr + лr²

A = лr (b + r) dir.

Koninin hacmi: $V = \frac{1}{3}$лr² h dir.

Konin hacmi: Taban alanının $\frac{h}{3}$ ile çarpımına eşittir.

Örnek: Taban yarıçapı 5 cm yüksekliği 15 cm olan koninin tüm alanını ve hacmini bulunuz.

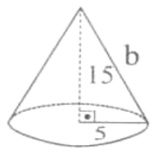
Çözüm : Pisagor bağıntısından

$b^2 = 5^2 + 15^2$

$b^2 = 25 + 225$

$b^2 = 250$

b = $5\sqrt{10}$ cm dir.



Koninin Alanı = лbr + лr^2

= л.$5\sqrt{10}$.5+л.52 = $25\sqrt{10}л + 25л$

=$25л.(\sqrt{10}л + 1)$c m ^{3} tür

V=$\frac{1}{3}$**лr^2 h**

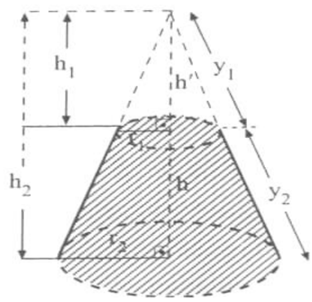
V=$\frac{1}{3}.3.(5)^2$.15

V=25.15

V= 375 cm^3 bulunur.

Kesik Koni:

Bir koninin, tabanına paralel bir düzlemle kesilmesi sonucu oluşan şekil kesik konidir.



Küre: Uzayda sabit bir O noktasından, eşit uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu cisme denir. Top bir küredir. Kürenin içi boş veya dolu olabilir.

Kürenin alanı: $A = 4\pi r^2$ Kürenin hacmi: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ dür.

Örnek: Yarıçapı 10 000 (10^4) km olan bir gezegenin (yaklaşık olarak dünyanın 1,5 katı; çünkü dünyanın yarıçapı 6400 km dir) Tüm alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm: A = 4 лr^2 = 4-3-$(10^4)^2$

A = 12-10^8 km^2

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}3(10^4)^3$

V = 4 • 10^{12} km^3 olur.

Örnek: Küp şeklindeki bir kabın hacmi, yarıçapı kübün bir kenarına eşit olan kürenin hacminin kaç katıdır?($\pi \cong 3$)

Çözüm: Kab küp şeklinde olduğundan hacmi $V_1 = a^3$ dür.

Kürenin hacmi ise; $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} . 3a^3$

$V_2 = 4a^3$ olur. Bu durumda $V_2 = 4 V_1$ dir.