Otonom Sistemler

Bu bölümde

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}) \tag{1}$$

şeklinde lineer olmayan denklemler göz önüne alınacaktır.

x ekseni üzerinde hareket eden birim kütleli bir parçacıktan oluşan basit bir dinamik sistem düşünülürse ve $f(x, \frac{dx}{dt})$ de ona etki yapan kuvvet ise, bu durumda (1) parçacığın hareket denklemidir. Her bir anda sistemin karakterize eden x (konum) ve $\frac{dx}{dt}$ (hız) ın değerleri sistemin *fazları* ve $(x, \frac{dx}{dt})$ değişkenler düzlemi de *faz düzlemi* adını alır.

(1) denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = f(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

sistemine eşdeğerdir.

Şimdi (2) sisteminden daha genel olan

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \tag{3}$$

sistemini ele alalım, burada F ve G düzlemin bir D bölgesinde sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlardır.

İkinci yandaki F ve G fonksiyonlarında t bağımsız değişkeninin açık olarak gözükmediği bu türdeki bir sistem *otonom sistem* adını alır.

Yukarıdaki varsayımlar ve Varlık-Teklik teoreminin bir sonucu olarak, t_0 herhangi bir sayı ve $(x_0, y_0) \in D$ faz düzleminde herhangi bir nokta ise, bu durumda (3) sisteminin $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir tek

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{4}$$

çözümü vardır.

$x(t)$ ve $y(t)$ nin her ikisi birden sabit fonksiyon değilse, bu durumda (4) faz düzleminde sistemin bir *yolu* (*yörüngesi ya da karakteristiği*) denen bir eğri tanımlar.

Lemma 1. $x = x(t),\ y = y(t)$ (3) sisteminin bir çözümü ise, bu durumda herhangi bir reel c sabiti için

$$\begin{cases} x_1 = x(t+c) \\ y_1 = y(t+c) \end{cases}$$

fonksiyonlar çifti de (3) sisteminin bir çözümüdür.

Uyarı 1. Lemma 1 otonom olmayan sistemler için geçerli değildir. Örneğin,

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = tx \end{cases}$$

sisteminin bir çözümü

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = te^t - e^t \end{cases}$$

şeklindedir. Ancak kolaylıkla görülebilir ki

$$\begin{cases} x_1 = x(t+c) = e^{t+c} \\ y_1 = y(t+c) = (t+c)e^{t+c} - e^{t+c} \end{cases}$$

çifti verilen sistemin çözümü değildir.

Lemma 2. D, $xy-$düzleminde bir bölge olmak üzere, otonom sistemlerde D nin herhangi bir noktasından en fazla bir yörünge geçer.

Tanım 1.

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ ve } G(x_0, y_0) = 0$$

eşitliklerini sağlayan (x_0, y_0) noktalarına (3) sisteminin *kritik noktaları* denir.

Varlık-Teklik teoremi nedeniyle bir kritik noktada garanti edilen tek çözüm $x = x_0,\ y = y_0$ sabit çözümüdür.

Uyarı 2. (1) denkleminin ya da ona eşdeğer olan (2) sisteminin kritik noktaları $(x_0, 0)$ noktalarıdır. Böyle bir nokta parçacığın hareketinin hem $\dfrac{dx}{dt}$

hızı hem de $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ ivmesinin sıfır olduğu bir duruma karşılık gelir. Yani parçacık hareketsiz durumdadır ve bu yüzden parçacık *denge durumundadır* denir ve kritik nokta yerine *denge noktası* terimi de kullanılır.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x-1)(y-1) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = (x+1)(y+1) \end{cases}$$

sisteminin kritik noktaları $(1,-1)$ ve $(-1,1)$ dir.