Kritik Nokta Türleri

Bu bölümde

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

otonom sistemi ele alınacaktır, burada F ve G fonksiyonlarının $xy-$düzleminde sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip oldukları kabul edilmektedir.

Tanım 1. (x_0, y_0), (1) sisteminin bir ayrık kritik noktası olsun. $C : [x(t), y(t)]$, (1) sisteminin bir yolu olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 \tag{2}$$

ise, bu durumda $t \to \infty$ a giderken C yolu (x_0, y_0) kritik noktasına *yaklaşıyor* denir.

Tanım 2. (x_0, y_0), (1) sisteminin bir ayrık kritik noktası olsun ve (2) eşitlikleri sağlansın.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \tag{3}$$

limiti mevcut ya da $t \to \infty$ için (3) oranı pozitif ya da negatif sonsuz ise, bu durumda $t \to \infty$ için C yolu (x_0, y_0) kritik noktasına *giriyor* denir.

Uyarı 1. Bazı durumlarda (1) sisteminin açık çözümlerini bulmak mümkündür ve bu durumda bu çözümler yolları belirtmek için kullanılabilir. Ancak çoğunlukla yolları bulmak için denklem sisteminden t yok edilerek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

diferensiyel denklemi çözülür.

Uyarı 2. Bu bölüm boyunca sistemin kritik noktasının $(0,0)$ olduğu kabul edilecektir. Bu kabul genelliği bozmaz. Gerçekten, kritik nokta $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ ise, bu durumda

$$v = x - x_0, \; w = y - y_0$$

konumu ile (1) sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = F(v + x_0, w + y_0) \\ \\ \dfrac{dw}{dt} = G(v + x_0, w + y_0) \end{cases} \tag{4}$$

sistemine indirgenir.

$$F(x_0, y_0) = 0, \; G(x_0, y_0) = 0$$

olduğundan, $(v, w) = (0, 0)$ (4) sisteminin kritik noktasıdır. Böylece $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ kritik noktası daima $(0, 0)$ kritik noktasına indirgenebilir.

Şimdi dört temel kritik noktayı açıklayalım.

1. Düğüm Noktası. Yolların dört tane yarı doğru ve parabol benzeri eğrilerden oluştuğu bir kritik nokta bir düğüm noktasıdır. Böyle bir noktaya $t \to \infty$ (ya da $t \to -\infty$) için her bir yol ile yaklaşılır ve girilir.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases} \tag{5}$$

sistemini ele alalım. $(0, 0)$ (5) sisteminin tek kritik noktasıdır. Bu sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \end{cases} \tag{6}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi reel sabitlerdir.

(i) $c_1 = 0$ ise, bu durumda (6) dan

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = c_2 e^{2t} \end{cases} \tag{7}$$

elde edilir. Bu durumda (7) den $c_2 > 0$ için pozitif $x-$ekseni, $c_2 < 0$ için negatif $y-$ekseni yoldur. Her bir yol $t \to -\infty$ için orijine yaklaşır ve girer.

(ii) $c_2 = 0$ ise, bu durumda (6) dan

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1 e^t \end{cases} \tag{8}$$

elde edilir. Bu durumda (8) den $c_1 > 0$ için $y = x, \ x > 0$ yarı doğrusu, $c_1 < 0$ için $y = x, \ x < 0$ yarı doğrusu yoldur. Her bir yol $t \to -\infty$ için orijine yaklaşır ve girer.

(iii) $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ ise, yollar (6) dan $y = x + \dfrac{c_2}{c_1^2} x^2$ parabolleri olarak elde edilir. Bu yolların her biri de $t \to -\infty$ için orijine yaklaşır ve girer.

Bu irdelemeler gösteriyor ki (5) sisteminin $(0,0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır.