Basit Kritik Noktalar

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

otonom sistemini ele alalım. $(0,0)$ (1) sistemin bir ayrık kritik noktası olsun. $F(x,y)$ ve $G(x,y)$, x ve y ye göre kuvvet serisine açılabilir ise, bu durumda (1) sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1x^2 + d_1xy + e_1y^2 + ... \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2x^2 + d_2xy + e_2y^2 + ... \end{cases} \tag{2}$$

şeklini alır. $|x|$ ve $|y|$ küçük olduğunda, yani (x,y) orijine yakın olduğunda ikinci ve daha yüksek dereceli terimler çok küçük olur. Bu yüzden lineer olmayan terimleri ihmal ederek $(0,0)$ kritik noktası komşuluğunda (2) sisteminin yollarının kalitatif davranışının (2) ye ilişkin

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \tag{3}$$

lineer sisteminin yollarının davranışına benzer olacağını düşünmek yerinde olacaktır.

Bu bölümde

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(x,y) \end{cases} \tag{4}$$

şeklinde sistemler ele alınacaktır. (4) sistemine ilişkin (3) lineer sisteminin $(0,0)$ a bir ayrık kritik nokta olarak sahip olması için

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

olduğu kabul edilecektir. Burada $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ fonksiyonları her (x,y) için sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahiptir. Ayrıca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ ve } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

olduğu kabul edilmektedir. Bu kısıtlamalara göre $(0,0)$ kritik noktası (4) sisteminin bir *basit kritik noktası* adını alır.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y + xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - 2xy^2 \end{cases} \tag{5}$$

sistemini ele alalım. Burada

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 \neq 0$$

olduğundan, $(0,0)$ (5) sistemine ilişkin

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases} \tag{6}$$

lineer sisteminin tek kritik noktasıdır. Ayrıca $f(x,y) = xy$ ve $g(x,y) = -2xy^2$ fonksiyonları her (x,y) için sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip olup

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ ve } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

eşitliklerinin sağlandığı da kolaylıkla görülebilir. O halde $(0,0)$, (5) sisteminin bir basit kritik noktasıdır.

Teorem 1. $(0,0)$, (4) sisteminin bir basit kritik noktası olsun. (4) sistemine ilişkin (3) lineer sisteminin $(0,0)$ kritik noktasının türü üç temel durumdan birine giriyorsa, bu durumda (4) sisteminin basit kritik noktası da aynı türdendir.

Örnek 2. (5) sistemini tekrar ele alalım. (5) sistemine ilişkin (6) lineer sisteminin karakteristik denklemi

$$m^2 + m + 1 = 0$$

olup, kökler $m_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ dir. Kökler eşlenik kompleks ve sırf sanal olmadığından, 3. Durum karşımıza çıkar ve (6) lineer sisteminin $(0,0)$ kritik noktası bir sarmal noktadır. Teorem 1 nedeniyle, (5) lineer olmayan sistemin $(0,0)$ kritik noktası da bir sarmal noktadır.

Uyarı 1. (4) sistemine ilişkin (3) lineer sisteminin $(0,0)$ kritik noktası bir sınır düğüm noktası ise, bu durumda (4) lineer olmayan sisteminin $(0,0)$ basit kritik noktası düğüm ya da sarmal noktadır.

(4) sistemine ilişkin (3) lineer sisteminin $(0,0)$ kritik noktası bir merkez ise, bu durumda (4) lineer olmayan sisteminin $(0,0)$ basit kritik noktası bir merkez ya da sarmaldır.

Teorem 2. $(0,0)$, (4) sisteminin bir basit kritik noktası olsun. (4) sistemine ilişkin (3) lineer sisteminin $(0,0)$ kritik noktası asimptotik kararlı ise, bu durumda (4) lineer olmayan sisteminin $(0,0)$ basit kritik noktası da asimptotik kararlıdır.