n-yinci Basamaktan Lineer Homogen Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı

$$L(D)y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{1}$$

denklemini gözönüne alalım, burada $a_1, a_2, ..., a_n$ katsayıları reel sabitlerdir.

(1) denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı onun

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$$

karakteristik polinomunun köklerinin yapısına bağlıdır.

Teorem 1. (1) denkleminin $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise, bu durumda (1) denkleminin verilen herhangi bir $y(t)$ çözümü için

$$|y(t)| \leq Me^{-\alpha t}, \ t \geq 0,$$

olacak şekilde pozitif α ve M sayıları vardır ve buradan $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t)| = 0$ dır.

Tanım 1. $y(t) = y(t, 0, y_0)$ (1) denkleminin çözümü olsun. Her $t \in [0, \infty)$ için $|y(t)| \leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti var ise, bu durumda $y(t)$ çözümüne $[0, \infty)$ üzerinde sınırlıdır denir.

Sonuç 1. $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun tekrarlanma sayısı 1 den büyük olan bütün kökleri negatif reel kısımlara sahip ve tekrarlanma sayısı 1 olan kökleri pozitif olmayan reel kısımlara sahip ise, bu durumda (1) denkleminin çözümlerinin tümü $[0, \infty)$ üzerinde sınırlıdır.

Teorem 2 (Routh-Hurwitz Kriteri). Reel katsayılı

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

karakteristik denkleminin köklerinin tümünün reel kısımlarının negatif olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki Hurwitz matrisinin bütün asli köşegen minörlerinin pozitif olmasıdır:

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Hurwitz matrisinin asli köşegen minörleri aşağıdaki gibidir:

$$D_1 = |a_1|\,,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, ...,\ D_n = \det H_n$$

Uyarı 1. $D_n = a_n D_{n-1}$ olduğundan $D_1 > 0,\ D_2 > 0, ...,\ D_n > 0$ koşullarından sonuncusu $a_n > 0$ koşulu ile değiştirilebilir.

Örnek 1.

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

polinomu için Hurwitz koşulları

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0$$

dır.

Örnek 2.

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

polinomu için Hurwitz koşulları

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_1a_2 - a_3 > 0$$

şeklindedir.

Tanım 2. (1) denkleminin $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise, bu durumda $L(\lambda)$ polinomuna kararlıdır denir.

Teorem 3. (1) denkleminin $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise, bu durumda diferensiyel denklemin $y \equiv 0$ aşikar çözümü asimptotik kararlıdır.

Örnek 3.

$$y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$$

denklemine ilişkin karakteristik polinom

$$L(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5$$

olup

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_1a_2 - a_3 > 0$$

Hurwitz koşulları sağlanır. O halde verilen denklemin tüm çözümleri sınırlıdır. Ayrıca aşikar çözüm asimptotik kararlıdır.