Matematiksel Modeller

Av-Avcı Modeli

$x(t)$ ve $y(t)$, t anındaki av ve avcı nüfuslarını göstersin. Aşağıdaki varsayımları göz önüne alalım:

(i) Avcı olmadığı zaman, av nüfusu kendi nüfusuyla orantılı bir hızla artar.

(ii) Av olmadığı zaman, avcı nüfusu kendi nüfusuyla orantılı bir hızla azalır.

(iii) Avcı ve avın bir arada bulunması avcı türünün nüfusunun artmasına yararken av türünün azalmasına neden olur.

Bu varsayımlardan hareketle aşağıdaki birinci basamaktan lineer olmayan denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy, \ \ a, b > 0, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -py + qxy, \ \ p, q > 0. \end{cases} \tag{1}$$

(1) sisteminin kritik noktaları $(0, 0)$ ve $(\frac{p}{q}, \frac{a}{b})$ dir.

Uyarı 1. Eğer av ve avcı türlerinin nüfusları sırasıyla $\frac{p}{q}$ ve $\frac{a}{b}$ ise, bu durumda bu nüfuslar zamandan bağımsız kalacaktır, yani denge nüfuslarıdır.

Uyarı 2. (1) sisteminin yolları

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(p - qx)}{x(a - by)}, \ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0,$$

diferensiyel denklemi çözülerek

$$a \ln \frac{y}{y_0} + p \ln \frac{x}{x_0} = b(y - y_0) + q(x - x_0)$$

olarak bulunur.

$(\frac{p}{q}, \frac{a}{b})$ noktasından çizilen doğrular birinci quadrantı dört bölgeye ayırır. $x(t)$ ve $y(t)$ nin bu dört bölgedeki davranışı aşağıda ifade edilmektedir:

1. Bölge: $(x > \frac{p}{q}$ ve $y > \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} < 0,\ \frac{dy}{dt} > 0,$

2. Bölge: $(x < \frac{p}{q}$ ve $y > \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} < 0,\ \frac{dy}{dt} < 0,$

3. Bölge: $(x < \frac{p}{q}$ ve $y < \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} > 0,\ \frac{dy}{dt} < 0,$

4. Bölge: $(x > \frac{p}{q}$ ve $y < \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} > 0,\ \frac{dy}{dt} > 0,$

Buna göre av türü 1. ve 2. bölgede azalırken, 3. ve 4. bölgede artar. Benzer olarak avcı türü 1. ve 4. bölgede artarken, 2. ve 3. bölgede azalır. Belli bir süre sonra bu iki tür kendi başlangıç boyutlarına döner ve böylece iki türün büyüklükleri zamana göre periyodik olarak değişir.

Rekabet Modeli

$x(t)$ ve $y(t)$ aynı besin kaynakları için mücadele eden farklı iki türün nüfusları olsun. Buna göre her bir tür diğerinin yokluğunda artarken, diğer türün mevcut olması durumunda büyüme hızı düşer. Buna göre aşağıdaki lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy,\ \ a, b > 0, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = py - qxy,\ \ p, q > 0. \end{cases} \tag{2}$$

(2) sisteminin kritik noktaları $(0, 0)$ ve $(\frac{p}{q}, \frac{a}{b})$ dir.

Uyarı 3. Eğer her bir türün nüfusu sırasıyla $\frac{p}{q}$ ve $\frac{a}{b}$ ise, bu durumda bu nüfuslar zamandan bağımsız kalacaktır, yani denge nüfuslarıdır.

Uyarı 4. (2) sisteminin yolları

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(p - qx)}{x(a - by)},\ \ x(0) = x_0,\ \ y(0) = y_0,$$

diferensiyel denklemi çözülerek

$$a \ln \frac{y}{y_0} - p \ln \frac{x}{x_0} = b(y - y_0) - q(x - x_0)$$

olarak bulunur.

$(\frac{p}{q}, \frac{a}{b})$ noktasından çizilen doğrular birinci quadrantı dört bölgeye ayırır. $x(t)$ ve $y(t)$ nin bu dört bölgedeki davranışı aşağıda ifade edilmektedir:

1. Bölge: $(x > \frac{p}{q}$ ve $y > \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dt} < 0$,

2. Bölge: $(x < \frac{p}{q}$ ve $y > \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dt} > 0$,

3. Bölge: $(x < \frac{p}{q}$ ve $y < \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} > 0$, $\frac{dy}{dt} > 0$,

4. Bölge: $(x > \frac{p}{q}$ ve $y < \frac{a}{b})$ $\frac{dx}{dt} > 0$, $\frac{dy}{dt} < 0$,

Buna göre, her bir bölgede integral eğrileri çizildiğinde görülmektedir ki, başlangıç nüfuslarında yapılan küçük değişiklikler nüfusların nihai davranışında büyük değişikliklere sebep olmaktadır.