# Fark Denklemleri

## Temel Tanımlar

**Tanım 1.** Bir $S \subset \mathbb{N}$ sayı cümlesi üzerinde tanımlı olan bir $y$ fonksiyonunun değerlerini ve onun $\Delta y,\ \Delta^2 y, ...$ gibi bir ya da daha çok farklarını içeren bir denkleme $S$ cümlesi üzerinde bir fark denklemi denir.

$y$ fonksiyonu bütün reel sayılar üzerinde tanımlı olmak üzere aşağıdaki denklemler birer fark denklemidir:

$$\begin{aligned} \Delta y_k + 2y_k &= 0, \qquad (1) \\ \Delta^2 y_k + 3\Delta y_k - y_k &= 1, \\ \Delta^2 y_k - 2k\Delta y_k - y_k &= k+1, \\ (\Delta y_k)^2 + y_k &= 0. \end{aligned}$$

**Uyarı 1.**

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

olduğundan yukarıdaki denklemler aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} y_{k+1} + y_k &= 0, \qquad (2) \\ y_{k+2} + y_{k+1} - 3y_k &= 1, \\ y_{k+2} - 2(k+1)y_{k+1} + 2ky_k &= k+1, \\ (y_{k+1} - y_k)^2 + y_k &= 0. \end{aligned}$$

**Tanım 2.** Aşağıdaki formda yazılan bir fark denklemine $S$ cümlesi üzerinde lineerdir denir:

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + ... + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k), \qquad (3)$$

burada $f_0, f_1, ..., f_{n-1}, f_n$ ve $g$ fonksiyonları $S$ cümlesindeki bütün $k$ değerleri için tanımlı olmak üzere sadece $k$ nın fonksiyonlarıdır.

**Tanım 3.** (3) denkleminde $f_0, f_1, ..., f_{n-1}, f_n$ fonksiyonları sabit ise, bu durumda (3) denklemine sabit katsayılı lineer denklem denir.

**Tanım 4.** (3) denkleminde $g(k) \equiv 0$ ise, bu durumda (3) denklemine lineer homogen fark denklemi denir.

**Tanım 5.** (3) formunda yazılan bir fark denkleminde $f_0$ ve $f_n$ katsayılarının ikisi de $S$ in herbir noktasında sıfırdan farklı ise, bu durumda (3) denklemine $n-$yinci basamaktan lineer fark denklemidir denir.

**Örnek 1.** (3) deki denklemleri ele alalım.

İlk denklem birinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen bir fark denklemidir.

İkinci denklem ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen olmayan bir fark denklemidir.

Üçüncü denklem ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homogen olmayan bir fark denklemidir.

Son denklem birinci basamaktan lineer olmayan bir fark denklemidir.

**Tanım 6.** Bir $y$ fonksiyonu bir $S$ cümlesi boyunca bir fark denklemini sağlıyorsa, bu durumda $y$ fonksiyonuna fark denkleminin $S$ cümlesi üzerinde bir çözümüdür denir.

**Örnek 2.**

$$y_k = 2^k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

fonksiyonu birinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen

$$y_{k+1} - 2y_k = 0,\ k = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

fark denkleminin bir çözümüdür. Belirtelim ki (4) denkleminin bütün çözümleri $c$ bir keyfi sabit olmak üzere

$$y_k = c2^k,\ k = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

formundadır. Gerçekten (5) fonksiyonunun (4) denklemini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

(5) fonksiyonuna (4) denkleminin genel çözümü denir.

**Teorem 1.** Bir $S$ cümlesi üzerinde tanımlı olan $n-$yinci basamaktan lineer

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + ... + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k)$$

fark denklemi ve $y$ nin ardışık $n$ tane değerinden meydana gelen başlangıç değer probleminin $S$ üzerinde tanımlı bir tek çözümü vardır.