

Fark Denklemleri (Devam)

Birinci Basamaktan Fark Denklemleri

Birinci basamaktan lineer fark denklemi

$$f_0(k)y_{k+1} + f_1(k)y_k = g(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

formundadır, burada f_0 ve f_1 fonksiyonları S cümlesi üzerinde tanımlı ve her $k \in S$ için sıfırdan farklı olan fonksiyonlardır.

(1) denkleminde f_0 ve f_1 sabit ise, bu durumda denklem

$$y_{k+1} = Ay_k + B, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir, burada $A \neq 0$ dır.

Teorem 1. y_0 verilmek üzere (2) fark denkleminin tek çözümü

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + B \frac{1 - A^k}{1 - A}, & A \neq 1, \\ y_0 + Bk, & A = 1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

dir.

Örnek 1.

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 2y_k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ y_0 &= 5 \end{aligned} \quad (4)$$

başlangıç değer problemini çözüünüz.

Çözüm. Açık olarak $A = 2$, $B = 1$ olup (3) formülünden (4) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} y_k &= 5 \cdot 2^k + \frac{1 - 2^k}{1 - 2} \\ &= 6 \cdot 2^k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

İkinci Basamaktan Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemleri

Bu kesimde ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen

$$y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_2y_k = 0 \quad (5)$$

fark denkleminin genel çözümü elde edilecektir. (5) denkleminin

$$y_k = m^k \quad (6)$$

şeklinde çözümü aranırsa,

$$m^2 + a_1m + a_2 = 0 \quad (7)$$

karakteristik denklemini elde edilir. m , (7) karakteristik denkleminin bir kökü ise, bu durumda (6) fonksiyonu (5) denkleminin çözümüdür. m_1 ve m_2 köklerinin durumuna ilişkin üç durum ortaya çıkar.

Durum 1. Karakteristik denklemin kökleri reel ve farklı.

Durum 2. Karakteristik denklemin kökleri reel ve eşit.

Durum 3. Karakteristik denklemin kökleri eşlenik kompleks.

Şimdi bu üç durumu ele alalım.

Durum 1. Karakteristik denklemin kökleri $m_1 \neq m_2$ reel olsun. Bu durumda (5) denkleminin genel çözümü

$$y_k = c_1m_1^k + c_2m_2^k$$

dır, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 2.

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + y_k = 0 \quad (8)$$

fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (8) denklemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 + 3m + 1 = 0$$

olup kökler $m_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, $m_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ reel ve farklıdır. O halde verilen denklemin genel çözümü

$$y_k = c_1 \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

dir.

Durum 2. Karakteristik denklemin kökleri $m_1 = m_2$ reel olsun. Bu durumda (5) denkleminin genel çözümü

$$y_k = c_1 m_1^k + c_2 k m_1^k$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 3.

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k = 0 \quad (9)$$

fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (9) denklemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

olup kökler $m_1 = m_2 = 1$ reel ve eşittir. O halde verilen denklemin genel çözümü

$$y_k = c_1 + c_2 k$$

dir.

Durum 3. Karakteristik denklemin kökleri eşlenik kompleks $m_{1,2} = a \pm ib$ olsun Bu durumda

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ve } \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

olank üzere (5) denkleminin genel çözümü

$$y_k = Ar^k \cos(k\theta + B)$$

dir, burada A ve B keyfi sabitlerdir.

Örnek 4.

$$y_{k+2} + y_k = 0 \quad (10)$$

fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (10) denklemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 + 1 = 0$$

olup kökler $m_{1,2} = \pm i$ dir. Buradan verilen denklemin genel çözümü

$$y_k = A \cos\left(\frac{k\pi}{2} + B\right)$$

dir.