2. AKIŞKAN STATİĞİ

2.8. Kaldırma Kuvveti

Batmış ya da yüzen bir cisme, akışkan tarafından uygulanan yukarı yönlü kuvvete kaldırma kuvveti denir ve yalnızca akışkanın özgül ağırlığıyla cismin batan hacminin çarpımına eşittir. Kaldırma kuvveti; cismin sıvı içindeki derinliğine, sıvının azlığına ya da çokluğuna ve hacimleri eşit ise cismin şekline bağlı değildir. Kaldırma kuvveti aşağıdaki gibi formülize edilebilir (Streeter ve Wylie 1983).

$F_B = \gamma \, . \, \forall$

F_B : Kaldırma kuvveti (N),
$\forall$: Cismin batan kısmının hacmi (m^3),
γ : Akışkanın özgül ağırlığı (N/m^3)'dır.

Kaldırma kuvvetini; cisim tarafından yer değiştirilen akışkan hacminin ağırlığı ya da cismin taşırdığı sıvının ağırlığı olarak da tanımlayabiliriz. Dalmış bir cisme etki eden kaldırma kuvvetinin uygulama noktası daima cismin hacim merkezi(sentroid)dir. Bu nedenle dalmış cisimlerde hacim merkezi aynı zamanda ağırlık merkezi olmaktadır. Yüzen cisimlerde ise kaldırma kuvveti, cismin dalmış kısmının hacim merkezinden geçmektedir. Ancak cismin hacim merkezi ağırlık merkezi olmamaktadır. Cismin havadaki ağırlığı ile sıvıdaki ağırlığı arasındaki fark kaldırma kuvvetine eşittir ($F_B = W_h - W_s$). Sıvının kaldırma kuvveti, cismin ağırlığından büyük ise, cisim su üzerinde yüzer ($F_B > W_{cis}$ ya da $\gamma_{sıvı} > \gamma_{cis}$). Sıvının kaldırma kuvveti ile cismin ağırlığı birbirine eşit ise, cisim sıvı içinde bırakıldığı yerde askıda kalır (($F_B = W_{cis}$ ya da $\gamma_{sıvı} = \gamma_{cis}$). Sıvının kaldırma kuvveti cismin ağırlığından küçük ise, cisim dibe batar (($F_B < W_{cis}$ ya da $\gamma_{sıvı} < \gamma_{cis}$).

2.9. Blok Halinde Sabit İvme İle Hareket Eden Akışkanlar

Blok halinde sabit ivme ile hareket eden sıkıştırılamaz akışkanların (sıvılar) iki tipi vardır. Bunlar sabit ivmeli düzgün hareket ve düşey bir eksen etrafında dönme hareketi (cebri vorteks)'dir.

Sabit ivmeyle bir blok halinde yatay yönde hareket eden bir sıvının yüzeyinde eş basınç eğrileri oluşur ve hareket yönünde serbest yüzeyi eğimlenir (Şekil 2.17). Bu harekette serbest sıvı yüzeyinin eğimi aşağıdaki gibi bulunabilir (Ayyıldız 1984; Streeter ve Wylie 1983).

$$\tan\theta = \frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z}$$

Burada;

$\tan\theta = dz/dy$: Sıvının serbest yüzeyinin eğimi (-),

a_y : Sıvının yatay doğrultudaki ivmesi (m/s^2),
g : 9.81 m/s^2,
a_z : Sıvının düşey doğrultudaki ivmesi (m/s^2)'dir.

Formüldeki (-) işareti eğimin hareket doğrultusunda aşağı yönlü olduğunu göstermektedir.

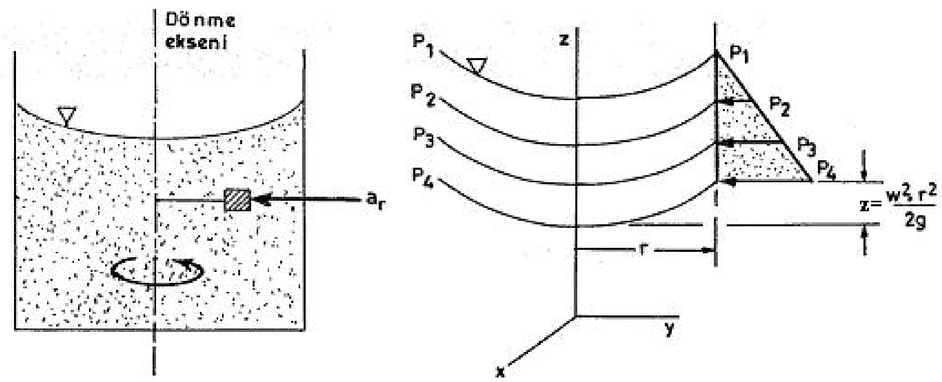
Cebri vorteksde serbest sıvı yüzeyinin denklemi ise;

$$z = \frac{w^2.r^2}{2.g} + \text{sabit}$$

bulunur (Edis 1972a, Bar-Meir 2011, White 2012). Buradaki;

z: Serbest sıvı yüzeyinin maksimum ve minimum noktaları arasındaki yükseklik farkıdır. Eğer referans noktası serbest sıvı yüzeyinin minimum noktası seçilirse sabit sıfır değerini alır. Cebri vorteksde yüzey denklemi bir paraboloiddir ve döner bir paraboloidin hacmi o paraboloidin dışına çizilen silindir hacminin yarısına eşittir.

Döner bir kaptaki sıvının dökülmeden meydana getirdiği paraboloidin maksimum ve minimum noktaları, sıvının dönmeden önceki serbest yüzeyine eşit uzaklıktadır.



Şekil 2.18. Cebri vortekste serbest sıvı yüzeyi (Munson vd. 1994)

2.10. Akışkan Statiğiyle İlgili Uygulama Örnekleri

<u>ÖRNEK-2.1:</u> Kapalı bir tankta 3 m yüksekliğinde özgül kütlesi 1260 kg/m^3 olan gliserin vardır. Gliserinin üzerinde hava olup, bu havanın basıncı 41 370 Pa'dır.

a) Tankın tabanına yapılan basıncı,
b) Tankın tabanındaki basınç yükünü,

c) Tankın tabanındaki 50 cm x 50 cm'lik kare kapağa gelen hidrostatik basınç kuvvetini bulunuz?

Çözüm:

a) Tankın tabanındaki basınç gliserinin ve havanın yapmış olduğu basınçların toplamıdır.

$P = P_h + \gamma.h$

$$P = 41370\ \text{Pa} + \left(1260\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right).\left(9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2.}\right).(3\text{m})$$

P= 78 451,8 Pa

b) Basınç yükü yükseklik birimiyle ifade edilir.

$$h = \frac{P}{\gamma_{su}} = \frac{78\,451{,}8\text{Pa}}{9810\ \ \text{N/m}^3}$$

h= 7,997 m

c) F= P.A= (78 451,8 Pa.).(0,5 m . 0,5 m)

F= 19612,95 N

ÖRNEK-2.2: Yerden 11 km yükseklikte stratosphere tabakasının başlangıcındaki mutlak basınç 22 600 Pa olup sıcaklık stratosphere tabakasının bitim noktası olan 20,1 km'ye kadar –56,5 C°'de sabit kalmaktadır. Stratosphere tabakasının 15. km'deki havanın mutlak basıncını ve özgül kütlesini bulunuz. g= 9,77 m/s^2 ve R= 286,9 j/kg.K alınacaktır.

Çözüm:

$$P_2 = P_1.e^{\left(\frac{-g(z_2-z_1)}{R.T_0}\right)}$$

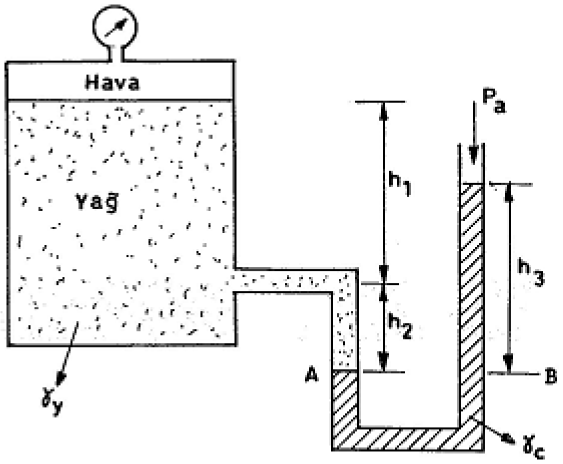
$$P_2 = (22\,600\ \text{Pa}).e^{-\frac{9{,}77\,\text{m/s}^2(15000-11000)\text{m}}{286{,}9\,\text{j/kg.K}(273-56{,}.5)\text{K}}}$$

P_2= 12 046,6 Pa

$$\rho = \frac{P_2}{R.T_0} = \frac{12\ \ 046{,}6\ \text{Pa}}{\left(286{,}9\,\frac{\text{j}}{\text{kg.K}}\right).(273-56{,}5)\ \text{K}}$$

ρ= 0,194 kg/m^3

ÖRNEK-2.3: Şekilde görülen tankta hava yağ tarafından tankın üstüne doğru sıkıştırılmıştır. Tanka bağlanan U-manometresinde h_1= 1 m, h_2= 0,2 m, h_3= 0,3 m'dir. Yağın özgül ağırlığı 9153 N /m³, manometrede yükselen civanın özgül ağırlığı 133 416 N/m³ ise tanka bağlı manometredeki basıncı bulunuz.



Çözüm:

A ve B noktalarında basınçları birbirlerine eşitleyelim.

$$P_A = P_{hava} + \gamma_y (h_1 + h_2)$$

$$P_B = P_a + \gamma_c . h_3$$

$P_A = P_B$'den

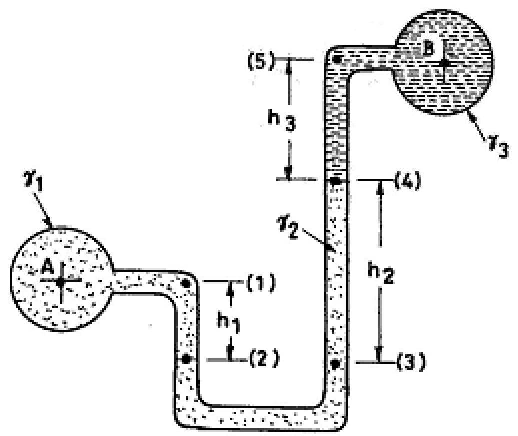
$$P_{hava} = P_a + \gamma_c . h_3 - \gamma_y (h_1 + h_2)$$

elde edilir. Biz manometrik basıncı bulacağımızdan atmosfer basıncı P_a= 0 alınır.

$$P_{hava} = 0 + \left(133\,416 \frac{N}{m^3}\right).(0,3 \text{ m}) - \left(9153 \frac{N}{m^3}\right).(1 \text{ m} + 0,2 \text{ m})$$

$$P_{hava} = 29041,2 \text{ Pa}$$

ÖRNEK-2.4: Aşağıdaki Şekilde verilen A ve B borularındaki basınç farkını bulunuz.



Çözüm:

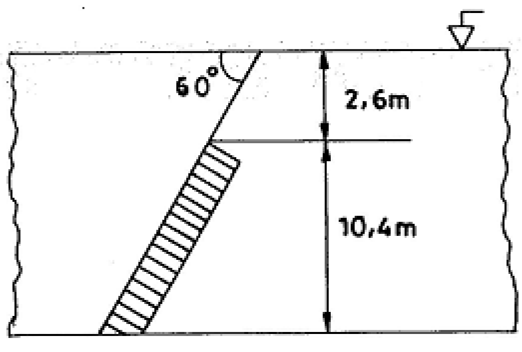
A ve B noktaları arasındaki basınç farkını bulmak için A noktasından başlayarak basınçları yazalım. Aşağı indikçe basıncı pozitif, yukarı çıktıkça basıncı negatif alalım.

$$P_A + \gamma_1.h_1 - \gamma_2.h_2 - \gamma_3.h_3 = P_B$$

$$P_A - P_B = \gamma_2.h_2 + \gamma_3.h_3 - \gamma_1.h_1$$ bulunur.

ÖRNEK-2.5: Bir kapak Şekilde gösterildiği gibi 60° eğimli olarak baraj tabanına yerleştirilmiştir. Barajın derinliği 13 m, baraj suyunun özgül ağırlığı 9810 N/m³, kapağın genişliği 5 m ve I x c = 720 m⁴ olarak verilmiştir.

a) Kapağa etki eden sıvı basınç kuvvetini,
b) Basınç kuvvetinin etkidiği basınç merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay ve düşey mesafesini
c) Ağırlık merkezi ile basınç merkezi arasındaki uzaklığı bulunuz.



Çözüm:

Kapağın tabanından serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığına X, kapağın tepesinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığına X_1 ve kapağın uzunluğuna L diyelim.

$$X = \frac{(10{,}4\ m + 2{,}6\ m)}{Sin60} = 15\ m$$

$$X_1 = \frac{2{,}6}{Sin60} = 3\ m$$

$L = X - X_1 = 15\ m - 3\ m = 12\ m$

a) Basınç prizması yöntemini kullandığımızda, meydana çıkan Şekil bir yamuk olup yamuğun hacmi sıvı basınç kuvvetine eşittir.

$$F_R = \left(\frac{\gamma.(10{,}4\ m + 2{,}6\ m) + \gamma.(2{,}6\ m)}{2}\right).L.b$$

$$F_R = \left(\frac{\left(9810\frac{N}{m^3}\right).(10{,}4\ m + 2{,}6\ m + 2{,}6\ m)}{2}\right).12\ m.5\ m$$

$F_R = 4\,591\,080\,N$ bulunur.

Basınç kuvvetinin bulunmasında ağırlık merkezinin serbest sıvı yüzeyi olan h_c yüksekliğini kullanırsak da aynı sonucu buluruz.

$$F_R = \gamma.h_c.A = \left(9810\frac{N}{m^3.}\right).((6\ m + 3\ m).Sin60).\ (5\ m.12\ m)$$

$$F_R = 4\,591\,080\,N$$

b) Basınç kuvvetinin etkidiği basınç merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay (y_R) ve düşey (h_R) uzaklıkları aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_R = \frac{Ixc}{y_c.A} + y_c$$

Burada;

y_c : Ağırlık merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığı olup 6+3= 9 m'dir.

Ixc : Atalet momenti olup 720 m^4 olarak verilmiştir.

$$y_R = \frac{720\ m^4}{(9\ m).(12\ m.5\ m)} + 9\ m$$

$$y_R = 10,3333\ m$$

$$h_R = y_R.Sin60 = (10,3330\ m).(Sin60)$$

$$h_R = 8,9489\ m$$

c) Basınç merkezi (y_R) ile ağırlık merkezi (y_c) arasındaki uzaklık (e);

e= y_R-y_c= 10,3333 m-9 m

e= 1,3333 m

bulunur. Ya da (y_R) bağıntısından

$$e = y_R - y_c = \frac{Ixc}{y_c.A} = \frac{720\ m^4}{9\ m.(12\ m.5\ m)}$$

e= 1,3333 m

elde edilir.

ÖRNEK-2.6: Özgül ağırlığı ölçülmek istenen mısırın havadaki ağırlığı W_h= 0,044 N olup özgül ağırlığı 9810 N/m^3 olan suya batırılıyor. Mısırın sudaki ağırlığı W_s= 0,011 N ölçüldüğüne göre denemeye alınan mısırın hacmini ($\forall_m$) ve özgül ağırlığını (γ_m) bulunuz.

Çözüm:

Mısır suya batırıldığında kaldırma kuvveti mısırı kaldırmaya çalışacak yani onu hafifletecektir. Sudaki mısıra etkiyen kaldırma kuvvetine göre mısırın havadaki ağırlığı sudaki ağırlığı ile kaldırma kuvetinin (F_B) toplamına eşittir.

$$W_h = W_s + F_B$$

$$F_B = W_h - W_s = 0,044\ N - 0,011\ N$$

$$F_B = 0.033\ N$$

Kaldırma kuvveti bilindiği gibi cismin taşırdığı sıvının ağırlığıdır. Ya da cismin sıvıya batan kısmının hacmi ile sıvının özgül ağırlığının çarpımıdır.

$$F_B = \gamma.\forall_m$$

$$\forall_m = \frac{F_B}{\gamma} = \frac{0{,}033\,N}{9810\,\frac{N}{m^3}}$$

$$\forall_m = 3{,}36391.10^{-6}\,m^3$$

mısırın özgül ağırlığı (γ_m)

$$\gamma_m = \frac{W_h}{\forall_m} = \frac{0{,}044\,N}{3{,}36391.10^{-6}.m^3}$$

$$\gamma_m = 13\ 080\,\frac{N}{m^3}$$

ÖRNEK-2.7: Yüksekliği 1,2 m, uzunluğu 3 m ve genişliği 2 m olan dikdörtgen prizması biçimindeki depo 0,8 m yüksekliğinde özgül ağırlığı 11 772 N/m^3 olan bir yağ ile doludur. Bu yağ deposunun yatay doğrultuda 2 m/s^2'lik sabit ivme ile çekilmesi durumunda;

a) Yağ yüzeyinin yatayla yaptığı açıyı,
b) Deponun hareket doğrultusundaki yüzeylerine etki eden bileşke basınç kuvetlerini bulunuz.

Çözüm:

a) Yağ yüzeyinin yatayla yaptığı açı (θ);

$$\frac{dz}{dy} = \tan\theta = \frac{a_y}{g + a_z}$$

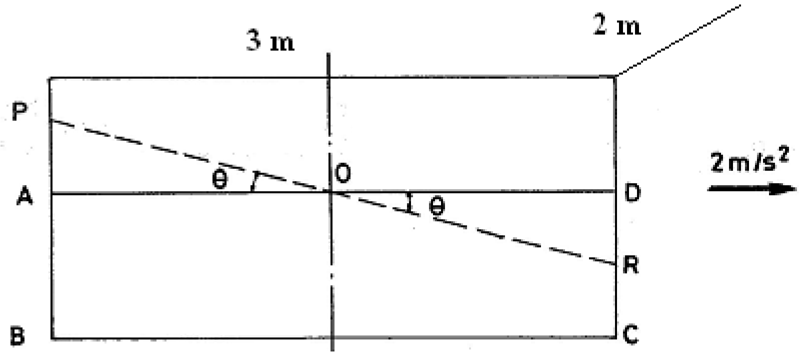
düşey doğrultuda bir hareket olmadığı için a_z= 0 alınır.

$$\tan\theta = \frac{a_y}{g}$$

$$\tan\theta = \frac{2\,m/s^2}{9{,}81\,m/s^2}$$

θ= 11.52°

b) Deponun hareket halindeki şematik resmini çizelim



Depo hareket halinde iken yağın etkidiği yan yüzeyler PB ve RC olmaktadır. Bu iki yüzeye gelen yağ basınç kuvvetini yağı statik kabul ederek bulabiliriz. Önce uzunlukları bulalım.

$$|AP| = |DR| = |OA|.\tan\theta$$

$$|AP| = |DR| = \frac{|BC|}{2}.\tan 11{,}52$$

$$|AP| = |DR| = 0{,}306\ \mathrm{m}$$

$$|PB| = |AP| + |AB| = 0{,}306\ \mathrm{m} + 0{,}8\ \mathrm{m}$$

$$|PB| = 1.106\ \mathrm{m}$$

$$|CR| = |DC| - |DR| = 0.8\mathrm{m} - 0.306\mathrm{m}$$

$$|CR| = 0{,}494\ \mathrm{m}$$

BP yüzeyine gelen kuvvet (F_{BP});

$$F_{BP} = \frac{1}{2}\gamma.|PB|.|PB|.b$$

$$F_{BP} = \frac{1}{2}.\left(11772\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right).(1{,}106\ \mathrm{m})^2.(2\ \mathrm{m})$$

$$F_{BP} = 14400\mathrm{N}$$

CR yüzeyine gelen kuvvet (F_{CR});

$$F_{CR} = \frac{1}{2}.\gamma.|CR|^2.b = \frac{1}{2}.11772\frac{N}{m^3}(0{,}494m)^{2.}.2m$$

$F_{CR} = 2872{,}8\,\mathrm{N}$

F_{BP} ve F_{CR} kuvvetlerini aşağıdaki yöntemle de bulabiliriz.

$$F_{BP} = \gamma . h_c . A$$

$$A = |PB| . b$$

$$h_c = \frac{|PB|}{2} \text{ 'dir.}$$

$$F_{BP} = \left(11772 \frac{N}{m^3}\right) . \left(\frac{1{,}106\ m}{2}\right) . (1{,}106\ m . 2\ m)$$
$$F_{BP} = 14400\,N$$

$$F_{CR} = \gamma . h_c . A$$

$$A = |CR| . b$$

$$h_c = \frac{|CR|}{2} \text{ 'dır.}$$

$$F_{CR} = \left(11722 \frac{N}{m^3}\right) . \left(\frac{0{,}494\,m}{2}\right) . (0{,}494\,m . 2\ m)$$

$$F_{CR} = 2872{,}8\,N$$

<u>ÖRNEK-2.8:</u> Yarıçapı r= 0,30 m ve yüksekliği H= 0,90 m olan üstü atmosfere açık silindir şeklindeki kap h= 0,70 m yüksekliğine kadar su ile doludur. Suyun serbest yüzeyine ait paraboloidin kabın tabanına teğet olması için silindir kabın z düşey ekseni etrafında hangi sabit w açısal hızı ve hangi sabit n devir sayısı ile döndürülmesi gerektiğini ve bu durumda silindirden atılan suyun hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

Suyun serbest yüzeyine ait paraboloidin kabın tabanına teğet olması demek su yüksekliği ya da suyun tepe noktası ile en alt noktası olan z'nin kabın yüksekliğine eşit olması demektir.

$$Z = H = 0.90m$$

Cebri vortekste sıvı serbest yüzeyinin denklemini yazalım.

$$z = \frac{w^2.r^2}{2g} \quad w = \left(\frac{z.2.g}{r^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{(0,90\,m).(2).(9,81\,m/s^2)}{(0,30)^2}\right)^{1/2} \quad w = 14\ \text{rad/s}$$

Açısal hız denkleminden de devir sayısı bulunur.

$$w = \frac{2\pi.n}{60} \quad n = \frac{60\ w}{2.\pi} = \frac{60.(14\ \text{rad/s})}{2.\pi} \quad n = 133,69\ \text{min}^{-1}$$

Silindirden atılan su miktarını bulmak için başlangıçta kapta bulunan sudan, son durumda kapta kalan su miktarını çıkartırız.
Başlangıçtaki su miktarı:

$$\forall_1 = \pi r^2 h = \pi.(0,30\,m)^2.(0,70\,m) = 0,1979\,m^3$$

Döndürüldükten sonra kapta kalan su miktarı $(\forall_2)$:

$$\forall_2 = \frac{1}{2}\pi\ r^2 H = \frac{1}{2}.\pi.(0,30\,m)^2.(0,90\,m) = 0,1272\ m^3$$

Kaptan atılan su miktarı:

$$\forall = \forall_1 - \forall_2 = 0,1979\ m^3 - 0,1272\ m^3 = 0,0707\ m^3\text{'dür.}$$