İstatistik 1

Bölüm 5

Olasılık Teorisi ve Kesikli Olasılık Dağılımları

Bu Bölümde İşlenecek Konular

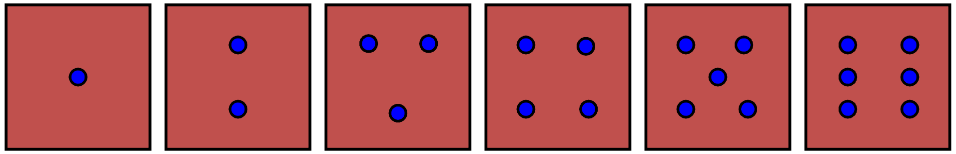
- Temel Olasılık Teorisi
  - Örnek uzayı ve olaylar, basit olasılık, birleşik olasılık
- Koşullu Olasılık
  - İstatistiksel bağımlılık, marjinal olasılık
- Bayes Teoremi

Bu Bölümde İşlenecek Konular

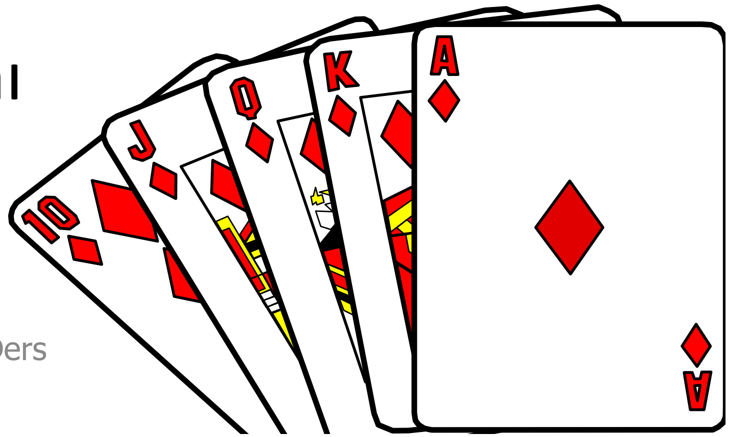
- Kesikli Rassal Değişkene ait olasılık
- Kovaryans
- Binom Olasılık Dağılımı
- Poisson Olasılık Dağılımı
- Hipergeometrik Olasılık Dağılımı

Örnek Uzayı

- Rasgele bir denemede ortaya çıkması olası sonuçların tamamıdır
  - Örnek: bir zar bir kez yuvarlandığında



  - sonuçlarından biri elde edilecektir. Sonuçların her biri basit olaydır
  - Örnek: Bir deste iskambil
  - Kağıdındaki kartların tamamı



Olaylar

- Basit Olay:
  - Rassal bir denemede ortaya çıkması olası sonuçlardan her birine denir
  - Örnek: Bir deste iskambil kağıdından elde edilecek kırmızı bir kart
- Birleşik Olaylar: Ortak olaylarda denir
  - Birden fazla basit olaydan oluşur
  - Örnek: Bir deste iskambil kağıdından bir kart çekilmesi durumunda kartın as ve siyah olma olasılığı hesaplanabilir. Bu durumda iki basit sonuç vardır. Kartın as ve kırmızı olması

Olayların Tablo ve Ağaç Diyagramı ile Gösterimi

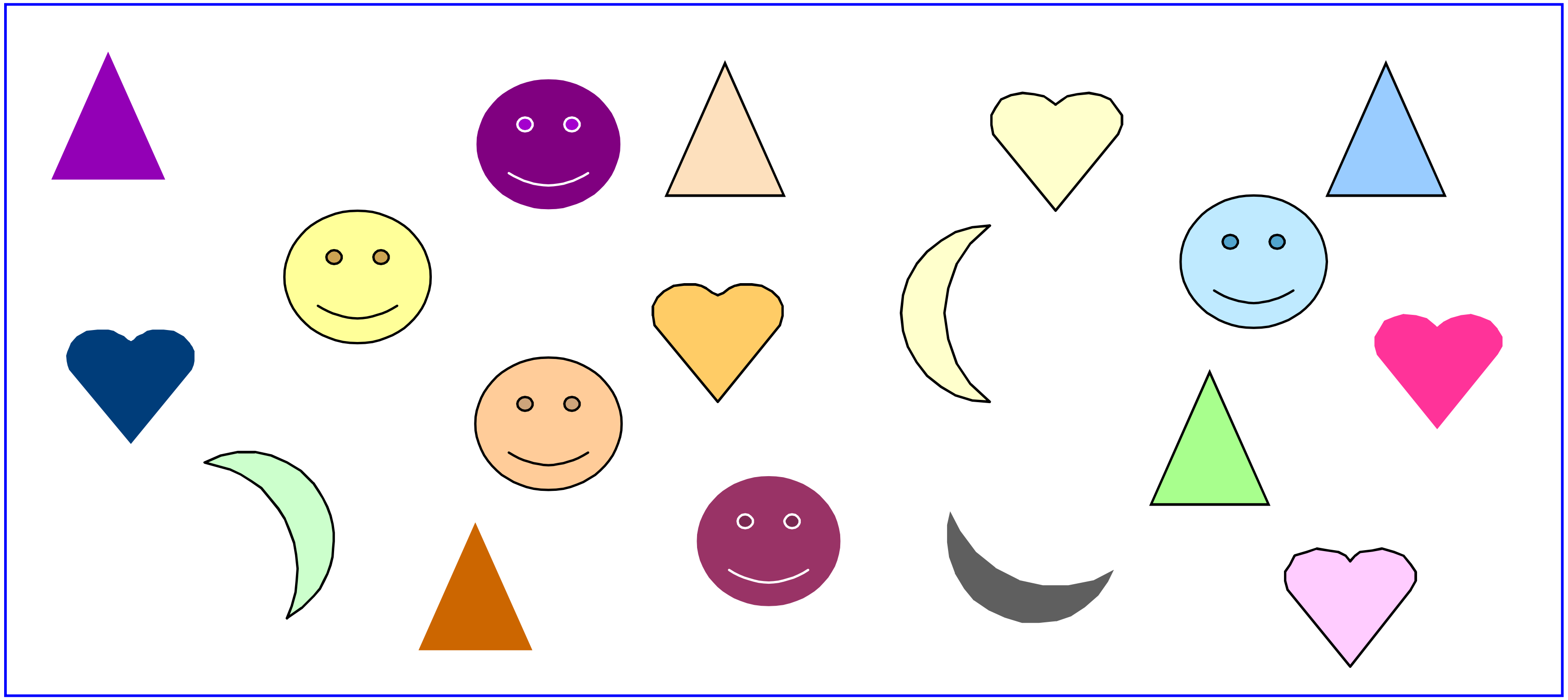
- Kontenjans Tabloları

	As	As değil	Toplam
Siyah	2	24	26
Kırmızı	2	24	26
Toplam	4	48	52

- Ağaç Diyagramı

Basit Olaylar

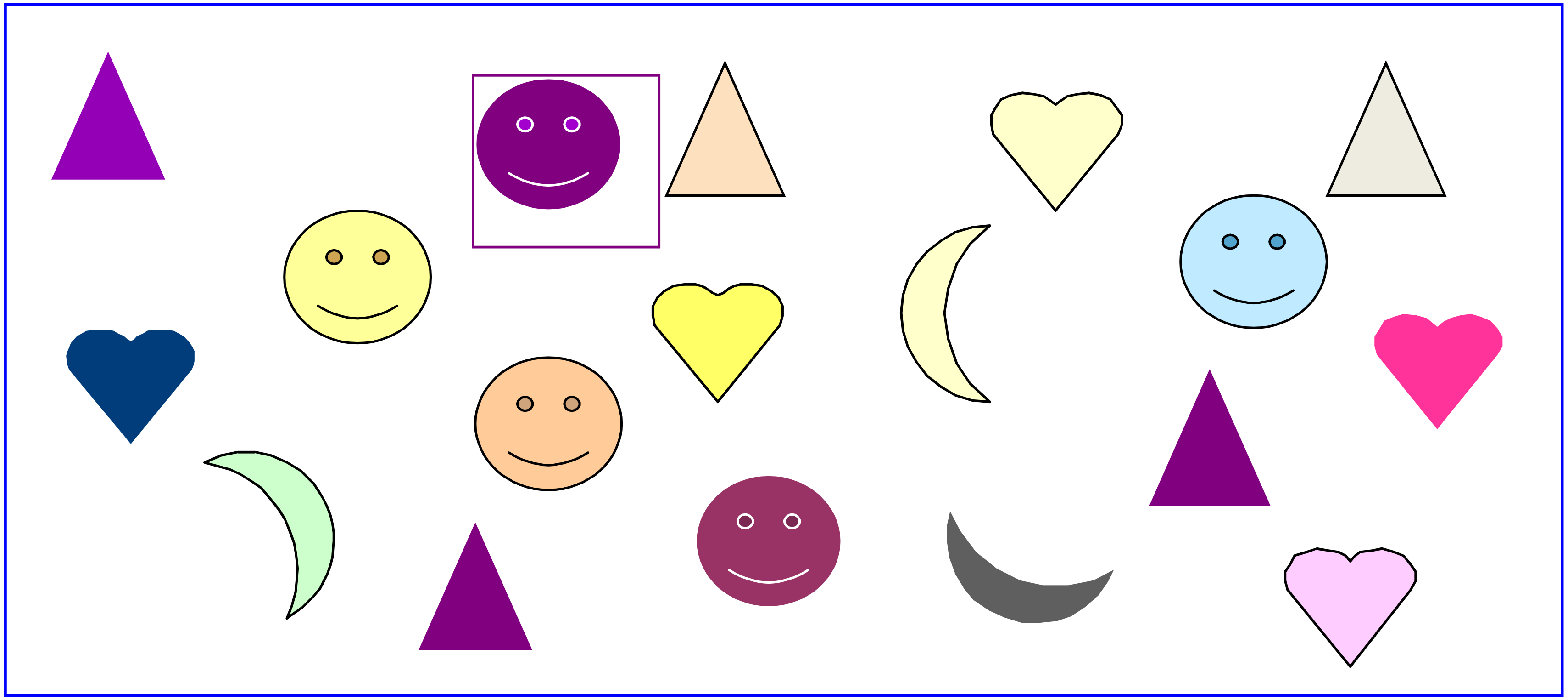
Üçgen olayı



Yukarıda 18 şekil içinde 5 üçgen bulunmaktadır

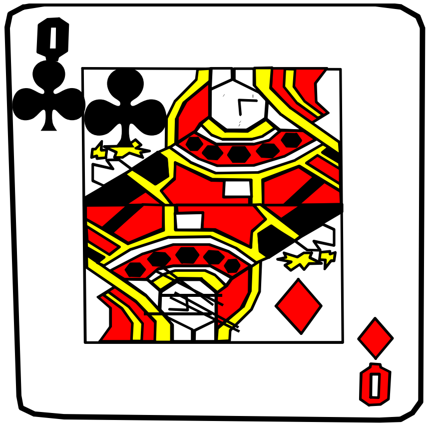
Birleşik Olasılıklar

Mavi renkte üçgen



2 adet mavi renkli üçgen var

Özel Olaylar



- İmkansız olaylar
  - Örnek: Bir kartta aynı anda sinek ve karo elde etme!
- Tamamlayıcı Olaylar
  - Örnek uzayında bulunan, A’da bulunmayan olaylar
  - **Ā** ile gösterilir
  - Örnek: A: siyah renkte as

    Ā : destede bulunan siyah renk as dışındaki kartlardan oluşan set

Özel Olaylar

- Tamamen Bağımsız Olaylar
  - İki olay hiçbir zaman birlikte gerçekleşmez
  - Örnek: -- A: siyah as; B: kırmızı as
    - A ve B tamamen bağımsızdır
- Bağımlı Olaylar
  - Olaylardan biri gerçekleşmek zorunda
  - Olaylar seti bütün örneği kapsamalı
  - Örnek: -- A: bütün aslar; B: bütün siyah kartlar; C: bütün kupalar; D: bütün baklavalar
    - Olay A, B, C ve D bağımlı
    - Olay B, C ve D de bağımlı

Kontenjans Tabloları

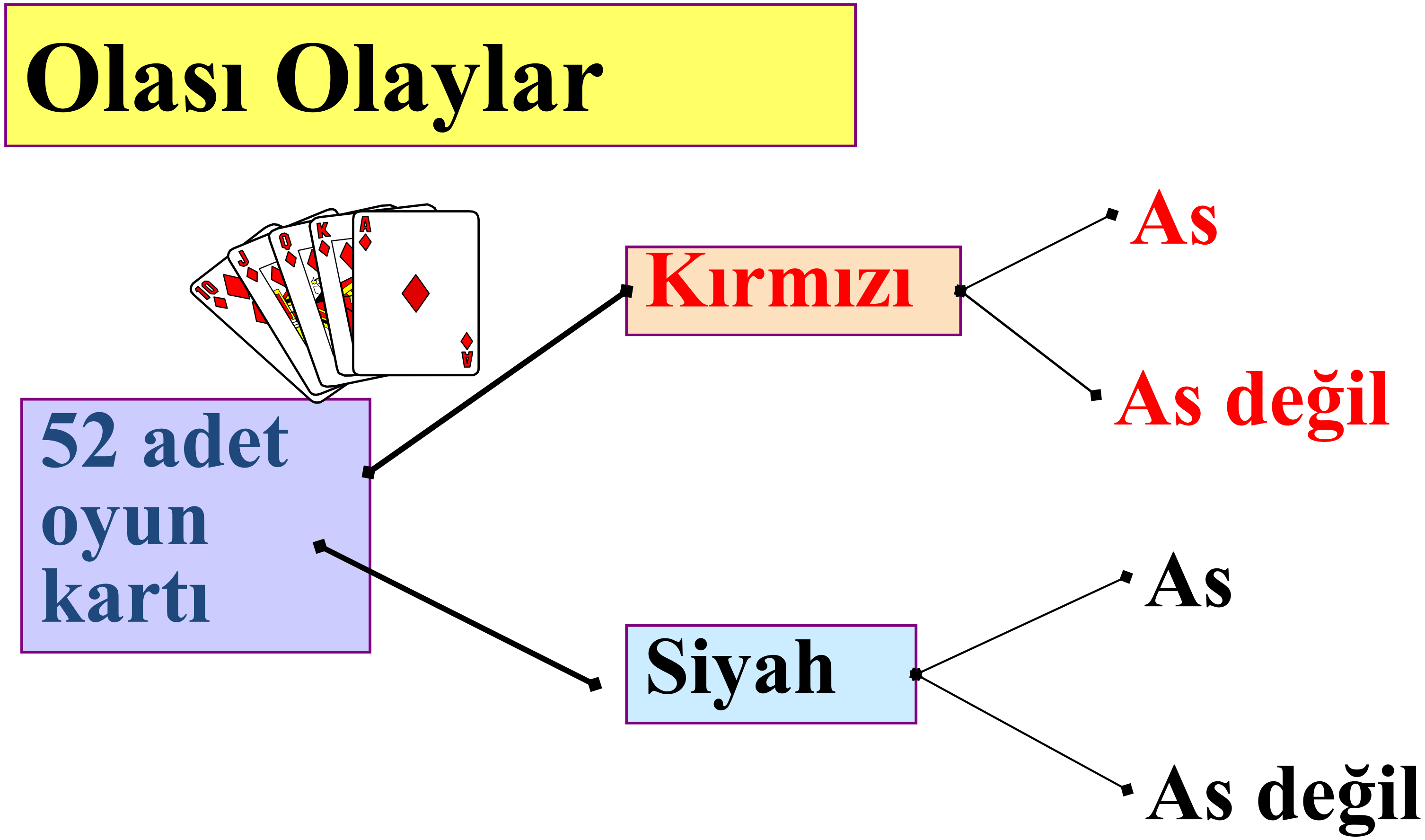
52 adet oyun kartı

Kırmızı as

	As	**As değil**	**Toplam**
Kırmızı	2	24	26
Siyah	2	24	26
Toplam	4	48	52

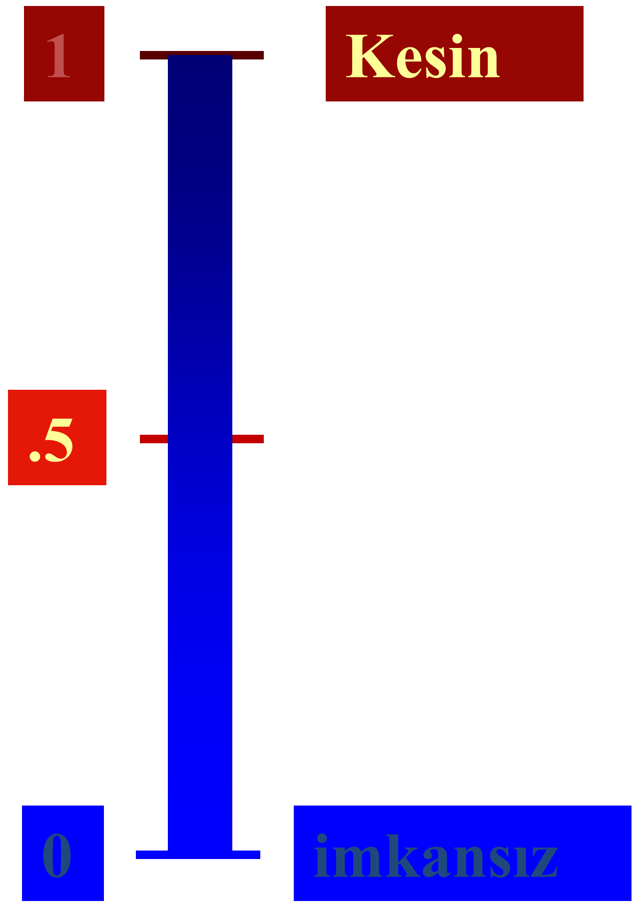
Örnek uzayı

Ağaç Diyagramı



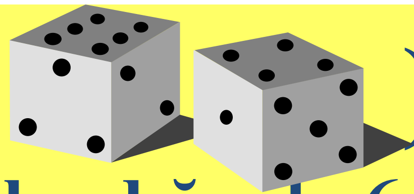
Olasılık

- Herhangi bir denemede bir olayın ortaya çıkma şansına denir
- Olayın ortaya çıkma şansı 0-1 arasındadır
- Bir denemede ortaya çıkması Olası olayların ayrı ayrı Olasılıklarının toplamı 1'e eşittir.



Olasılıkların Hesaplanması

- A olayının oluşma olasılığı:
- $P(A) = \frac{n_A}{N}$ Formülü ile hesaplanır

e.g. P( **) = 2/36**

Bir çift zar yuvarlandığında 6 ve 4 elde etme olasılığı 2/36 dır

- Örne
  olasılığı eşittir.

$$P(A \cap B)$$

- ***a. Bağımlı Olaylar***

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

b. Bağımsız Olaylar

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A ve B'nin Olasılığı: Kontenjans Tablosu ile

Olay	Olay		
	B_1	B_2	Toplam
A_1	P(A_1 ve B_1)	P(A_1 ve B_2)	P(A_1)
A_2	P(A_2 ve B_1)	P(A_2 ve B_2)	P(A_2)
Toplam	P(B_1)	P(B_2)	1

Ayrık Olaylar

Basit Marjinal Olasılıklar

Birleşik Olasılıkların Hesaplanması

- A ve B'nin birleşik olasılığı: Bağımsız Olaylar
  $P(AUB) = P(A) + P(B)$ dir.

  Bağımlı olaylar (ekleme kuralı)
  $P (AUB) = P (A)+P(B) – P (A\cap B)$

Birleşik Olasılıkların Hesaplanması

$P(A_1 \text{ veya } B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \text{ ve } B_1)$

Olay	Olay		Toplam
	B_1	B_2	
A_1	$P(A_1 \text{ ve } B_1)$	$P(A_1 \text{ ve } B_2)$	$P(A_1)$
A_2	$P(A_2 \text{ ve } B_1)$	$P(A_2 \text{ ve } B_2)$	$P(A_2)$
Toplam	$P(B_1)$	$P(B_2)$	1

Bağımsız olaylar için ekleme kuralı:

$P(A \text{ veya } B) = P(A) + P(B)$

Örnek

Çok iyi karılmış bir deste iskambil kağıdından rassal olarak bir kart çekilmiş olsun çekilen bu kartın as veya kırmızı renkte olma olasılığı nedir?

Çözüm: Olay A: Kırmızı kart ve olay B: as kart olsun.

52 kart içerisinde 4 adet as, 26 adet kırmızı ve 2 adet kırmızı renkte as kart bulunmaktadır. Bu iki olay birbirine bağlıdır. Bu nedenle

P(A veya B) = P(A) + P(B) - P(A ve B)

formül kullanarak bir deste iskambil kağıdından tek çekişte kırmızı renkte bir kart veya as elde etme olasılığı hesaplanabilir.

$P(A) = 26/52 = 1/2$

$P(B) = 4/52 = 0.077$

$P(A \cap B) = 2/52 = 0.038 \Rightarrow P(A \cup B) = 0.52$

Örnek

- Kartın kırmızı ve as olma olasılığı nedir?

- A ve B olaylarının toplamı/olası toplam olay= 2/52

Koşullu Olasılıkların Hesaplanması

- A'nın oluşmuş olması koşulu ile B'nin olasılığı:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Kartın as olması koşulu ile kırmızı olasılığı nedir?
2 adet kırmızı as kart/toplam 4 adet as kart

Koşullu Olasılıklar İçin Kontenjas Tablosu

Türü	Renk		Toplam
	Kırmızı	Siyah	
As	2	2	4
Diğer	24	24	48
Toplam	26	26	52

$$P(\text{Kır} \mid \text{As}) = \frac{P(\text{As ve Kır})}{P(\text{As})} = \frac{2}{4}$$

Koşullu Olasılıklar İçin Kontenjas Tablosu

Türü	Renk: Kırmızı	Renk: Siyah	Toplam
As	2	2	4
Diğer	24	24	48
Toplam	26	26	52

$$P(\text{As} \mid \text{Kır}) = \frac{P(\text{As ve Kır})}{P(\text{Kır})} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{2}{26}$$

Koşullu Olasılıklar ve İstatistiksel Bağımsızlık

- Koşullu Olasılık:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$$

- Çarpım Kuralı:

$$P(A \text{ ve } B) = P(A \mid B)\, P(B)$$
$$= P(B \mid A)\, P(A)$$

Koşullu Olasılıklar ve İstatistiksel Bağımsızlık

- Aşağıdaki koşulardan birinin sağlanması durumunda A ve B olayları istatistiksel olarak bağımsızdır

$$P(A \mid B) = P(A)$$

veya $$P(B \mid A) = P(B)$$

veya $$P(A \text{ ve } B) = P(A)P(B)$$

- A ve B olayları, A'nın ortaya çıkma olasılığı B'nin B'nin ortaya çıkma olasılığı da A'nın ortaya çıkma olasılığını etkilemiyorsa bağımsızdırlar

Olasılık Aksiyomları

- Örnek uzayının, S= {E_1, E_2, E_3, ...E_n} şeklinde olduğu kabul edilirse,
- E'lerin gerçekleşme olasılıkları ile ilgili 2 zorunluluk vardır.
- 1. $0 \leq P(E_i) \leq 1$
- Sonuç: Örnek uzayında bulunan herhangi bir basit olayın (E) gerçekleşme olasılığı 0 ile 1 arasında bir değer olacaktır.

Olasılık Aksiyomları

– 2. $$\sum_{i=1}^{n} P(Ei) = 1$$

- Sonuç: Örnek uzayını oluşturan basit olayların her birinin ortaya çıkma olasılıklarının toplam 1'e eşit olacaktır.

Bayes Teoremi

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + \bullet\bullet\bullet + P(A \mid B_k)P(B_k)}$$

$$= \frac{P(B_i \text{ and } A)}{P(A)}$$

Aynı Olay

Bayes Teoremi

$$P(A \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P(A)\ P(B \mid A)}}{\mathrm{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}}$$

Bayes Teoremi

Kredi alanlardan %50'si aldıkları krediyi zamanında geri ödemiştir. Kredi borcunu zamanında ödeyenlerden %40'ı üniversite mezunudur. Kredi borcunu zamanında geri ödeyemeyenlerin ise %10'u üniversite mezunudur. Rassal olarak seçilen birinin üniversite mezunu olması koşulu ile borcunu ödemiş olma olasılığı nedir?

$$P(R) = .50 \quad P(C|R) = .4 \quad P(C|\bar{R}) = .10$$

$$P(R \mid C) = ?$$

R: Kredi Borcunun Geri Ödenmiş Olması ($\bar{R}$: Ödenmemiş olması)

C: Üniversite Mezunu

Bayes Teoremi

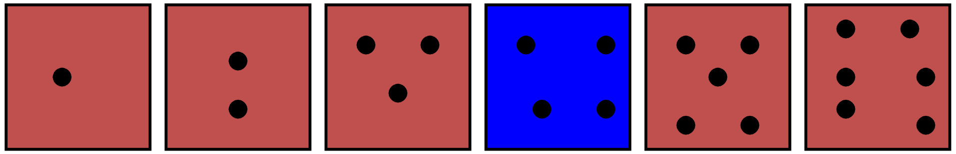
	R	$\overline{R}$	Toplam
C	.2	.05	.25
$\overline{C}$	.3	.45	.75
Toplam	.5	.5	1.0

$$P(R \mid C) = \frac{P(C \mid R)P(R)}{P(C \mid R)P(R) + P(C \mid \overline{R})P(\overline{R})}$$

$$= \frac{(.4)(.5)}{(.4)(.5)+(.1)(.5)} = \frac{.2}{.25} = .8$$

Rassal Değişken

- Rassal Değişken:
- Denemenin sonucu sayılabilen değerlerle ifade edilebilmekte
- Örnek: Zarı 2 kez yuvarlandığımızda kaç kez dört elde edebiliriz? 0, 1 veya 2 kez



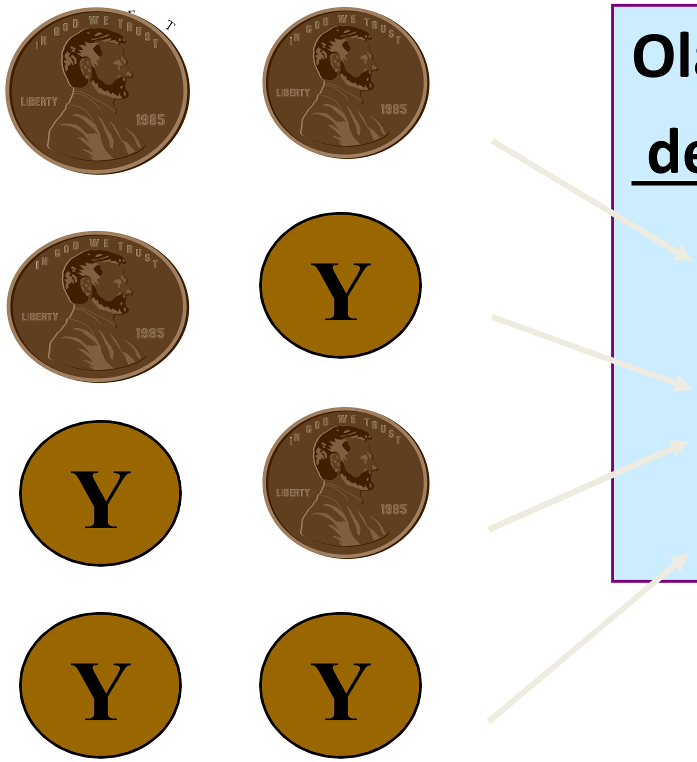
Kesikli Rassal Değişken

- Kesikli rassal değişken
  - 1, 2, 3 gibi sayılabilen değerlerden oluşur
  - Sonlu sayıda sayılabilen değerlerden oluşmaktadır
  - Örnek: Bir demir parayı havaya atın ve tura sayısını hesaplayın: 0, 1 2, 3, 4, 5

Kesikli Olasılık Dağılımı: Örnek

Olay: 2 demir paranın havaya atılması

Yazı sayısını hesaplayın



Olasılık Dağılımı

değer	Olasılık
0	1/4 = .25
1	2/4 = .50
2	1/4 = .25

Kesikli Olasılık Dağılımı

- Olası çiftleri listele [X_j , $p(X_j)$]
  - X_j = rassal değişkenin alması olası değer
  - $P(X_j)$ = değerin oluşma olasılığı
- Tamamen bağımsız olaylar
- Her bir değerin ayrı ayrı oluşma olasılıklarının toplamı 1'e eşittir

$$0 \leq P\left(X_j\right) \leq 1 \qquad \sum P\left(X_j\right) = 1$$

Ortalama ve Varyans

- Beklenen değer
  - Olasılık dağılımının ağırlıklı ortalamasıdır
  - $$\mu = E(X) = \sum_j X_j P(X_j)$$
  - Örnek: 2 demir parayı havaya atın ve tura sayısını hesaplayın daha sonra beklenen değeri hesaplayın

$$\mu = \sum_j X_j P(X_j)$$

$$= (0)(2.5) + (1)(.5) + (2)(.25) = 1$$

Ortalama ve Varyans

- Varyans
  - Ortalamadan sapmaların karelerinin ağırlıklı ortalamasıdır
  - $$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum (X_j-\mu)^2 P(X_j)$$
  - Örnek: Demir parayı 2 kez havaya atın tura sayısını ve varyansı hesaplayın

$$\sigma^2 = \sum (X_j-\mu)^2 P(X_j)$$

$$= (0-1)^2(.25) + (1-1)^2(.5) + (2-1)^2(.25) = .5$$

Kovaryans ve Kullanımı

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{N} \left[X_i - E(X) \right] \left[Y_i - E(Y) \right] P(X_i Y_i)$$

X : Kesikli rassal değişken

X_i : Kesikli rassal değişkenin alacağı i inci değer

Y : Kesikli rassal değişken

Y_i : Kesikli rassal değişkenin alacağı i inci değer

$P(X_i Y_i)$ X ve Y’nin i inci değerlerinin gerçekleşme olasılığı

Örnek

İki yatırımın her $1000 için getirileri

		Yatırım	
$P(X_i Y_i)$	Ekonominin durumu	Dow Jones fund X	Growth Stock Y
.2	Durgunluk	-$100	-$200
.5	İstikrarlı	+ 100	+ 50
.3	Büyüyen	+ 250	+ 350

$$E(X) = \mu_X = (-100)(.2) + (100)(.5) + (250)(.3) = \$105$$

$$E(Y) = \mu_Y = (-200)(.2) + (50)(.5) + (350)(.3) = \$90$$

Örnek

$P(X_iY_i)$	Ekonominin durumu	Yatırım: Dow Jones fund X	Yatırım: Growth Stock Y
.2	Durgunluk	-$100	-$200
.5	İstikrarlı	+ 100	+ 50
.3	Büyüyen	+ 250	+ 350

$$\sigma_X^2 = (-100-105)^2(.2) + (100-105)^2(.5) + (250-105)^2(.3)$$
$$= 14,725 \qquad \sigma_X = 121.35$$

$$\sigma_Y^2 = (-200-90)^2(.2) + (50-90)^2(.5) + (350-90)^2(.3)$$
$$= 37,900 \qquad \sigma_Y = 194.68$$

Örnek

$P(X_iY_i)$	Economic condition	Dow Jones fund X	Growth Stock Y
.2	Durgunluk	-$100	-$200
.5	İstikrarlı	+ 100	+ 50
.3	Büyüyen	+ 250	+ 350

Yatırım

$$\sigma_{XY} = (-100-105)(-200-90)(.2)+(100-105)(50-90)(.5) + (250-105)(350-90)(.3) = 23,300$$

Kovaryansın 23,300 olması iki yatırım arasında pozitif yönlü bir ilişki olduğunu göstermektedir. İki yatırım aynı yönde değişmektedir