İstatistik 1
Bölüm 7:
Sürekli rastsal Değişkenler

Bu Bölümde İşlenecek Konular

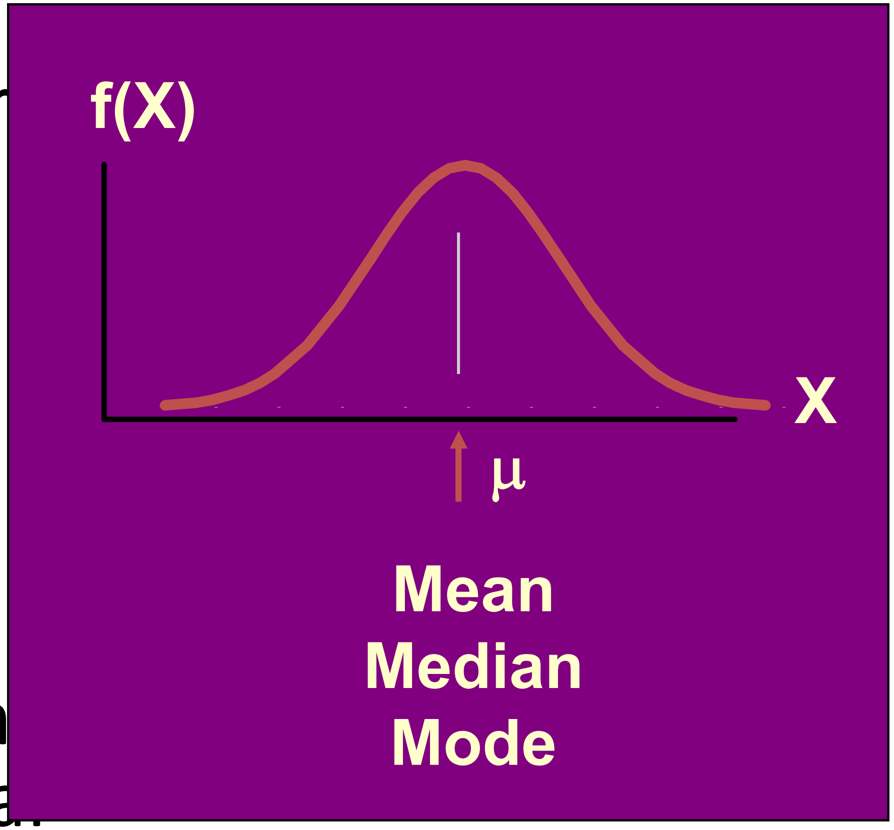
- Düzgün Dağılım
- Normal Dağılım
- Standart Normal Dağılım
- Normallik Varsayımının Analizi
- Üstel Dağılım

Sürekli Olasılık Dağılımı

- Sürekli rastsal değişken
  - Değerleri belli aralıklarda toplanır
  - Boşluk bulunmaz
- Sürekli Olasılık Dağılımı
  - Sürekli rastsal değişkenin alacağı değerlerin dağılımını gösterir
- En önemli Sürekli Olasılık Dağılımı:
  - Normal olasılık dağılımıdır.

Normal Olasılık Dağılımı

- Özellikleri:
- "Çan eğrisi biçimindedir
- Simetriktir
- Ortalama, medyan ve
mod eşittir
- Çeyrekler arası açıklık
- 1.33 σ
- Normal rastsal değişken
aralığında değerler alırla



Matematiksel Model

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}$$

$f(X)$: rastsal değişken X'in yoğunluk fonksiyonu

$\pi = 3.14159; \qquad e = 2.71828$

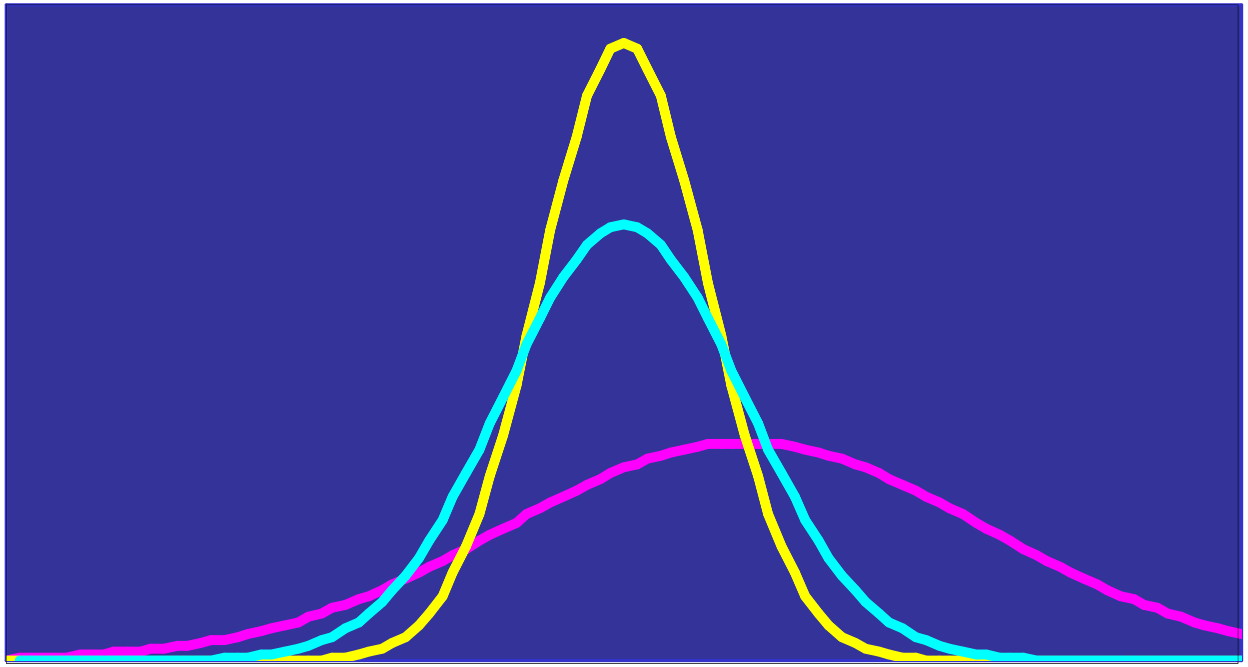
μ : Populasyon ortalaması

σ : Populasyon standart sapması

X : rastsal değişken X'in alacağı değer $\left(-\infty < X < \infty\right)$

Normal Olasılık Dağılımı

Sonsuz sayıda normal olasılık dağılımı bulunmaktadır

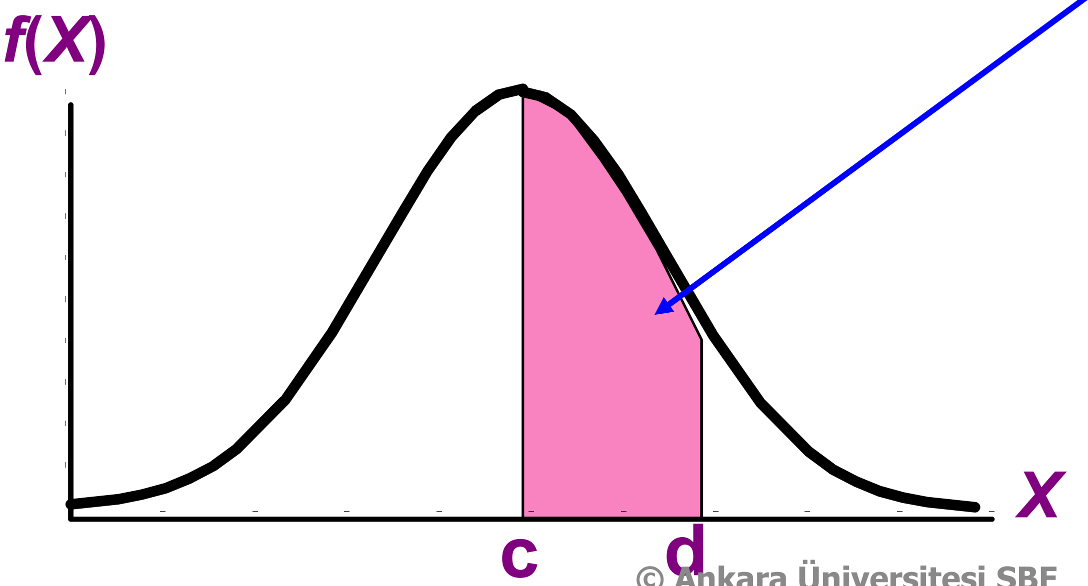


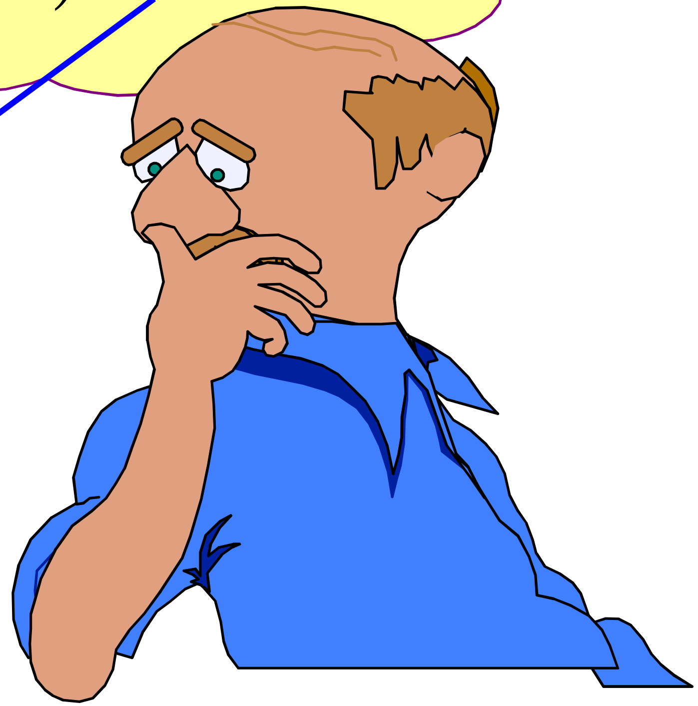
Parametreler σ ve μ, değiştiğinde normal olasılık dağılımının şekli değişir

Olasılıkların Bulunması

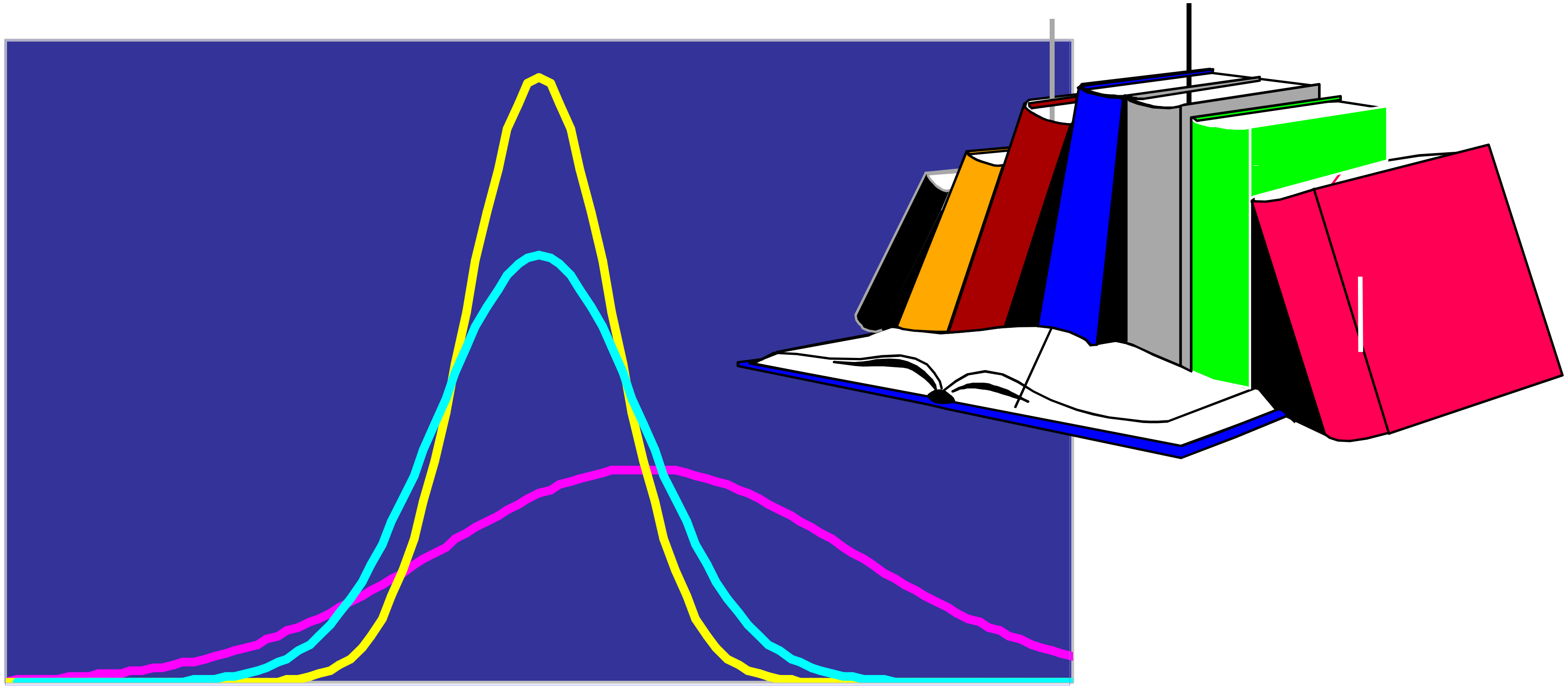
Olasılık eğrinin altında kalan alana eşittir!

$$P\left(c \le X \le d\right) = ?$$





Hangi Tablo Kullanılmalı?



Sonsuz sayıda normal dağılım eğrisinin bulunması sonsuz sayıda tabloya bakılacağı anlamı taşımaz!

© Onu

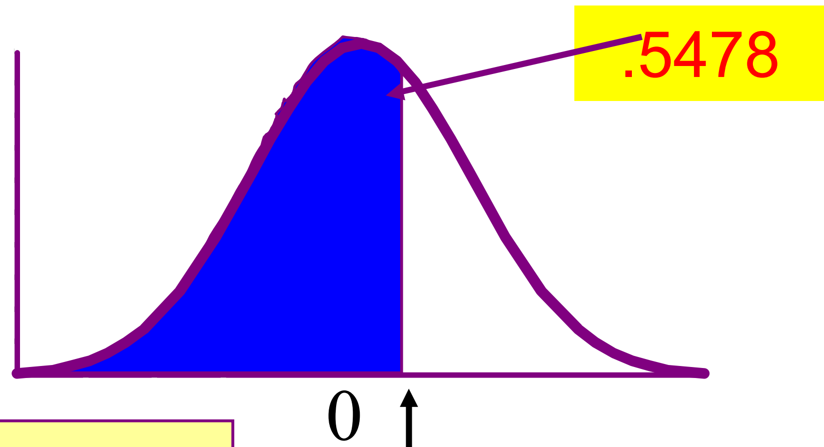
Çözüm: Standart Normal Olasılık Dağılım Tablosu

Standart normal olasılık dağılım tablosundan bir kesit

$$\mu_Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255

Probabilities

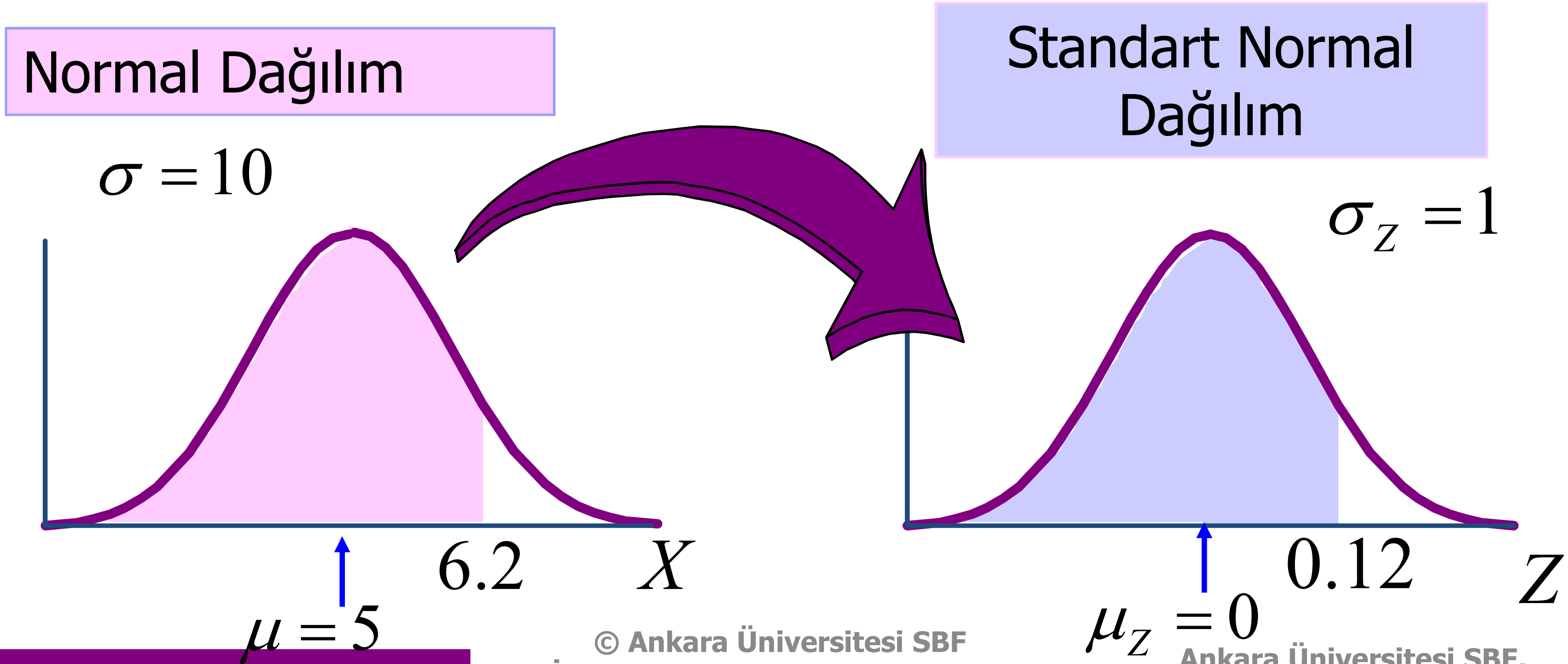


Z = 0.12

Sadece bir tabloya bakmak yeterli

Standart Normal Dağılım: Örnek

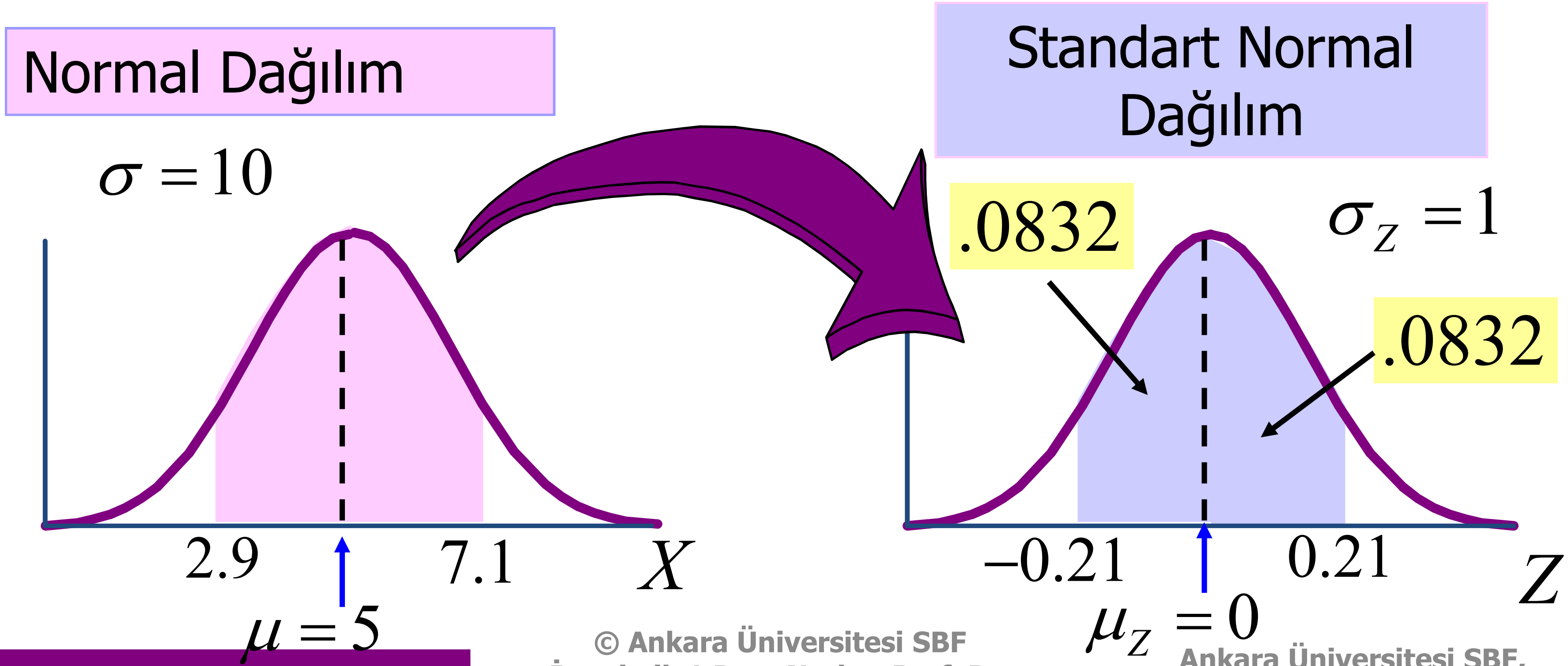
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{6.2 - 5}{10} = 0.12$$



Örnek:

$$P\left(2.9 \le X \le 7.1\right) = .1664$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{2.9-5}{10} = -.21 \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{7.1-5}{10} = .21$$



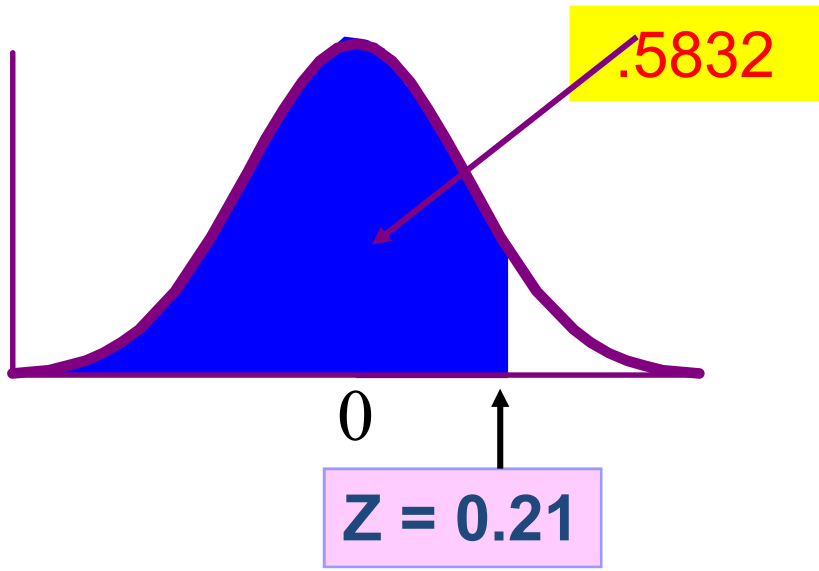
Örnek:

$$P(2.9 \le X \le 7.1) = .1664$$

Birikimli standart normal olasılık dağılım tablosu

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255

$$\mu_Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$



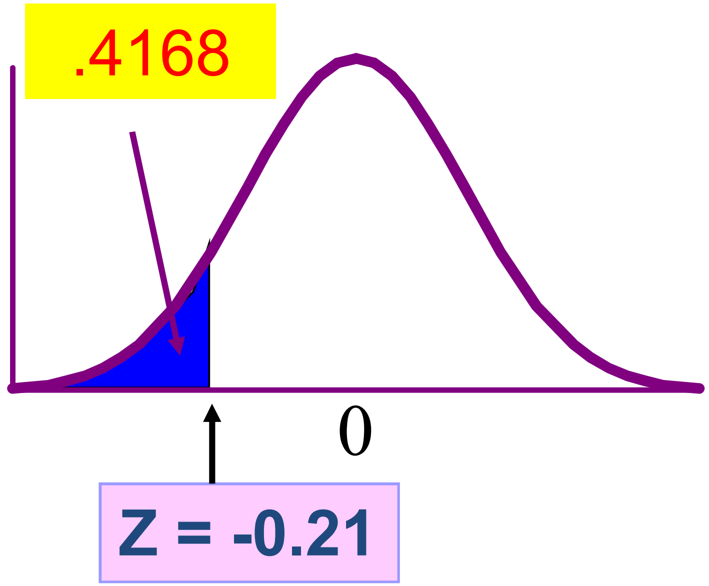
Örnek:

$$P\left(2.9 \le X \le 7.1\right) = .1664$$

Cumulative Standardized Normal Distribution Table (Portion)

Z	.00	.01	.02
-03	.3821	.3783	.3745
-02	.4207	.4168	.4129
-0.1	.4602	.4562	.4522
0.0	.5000	.4960	.4920

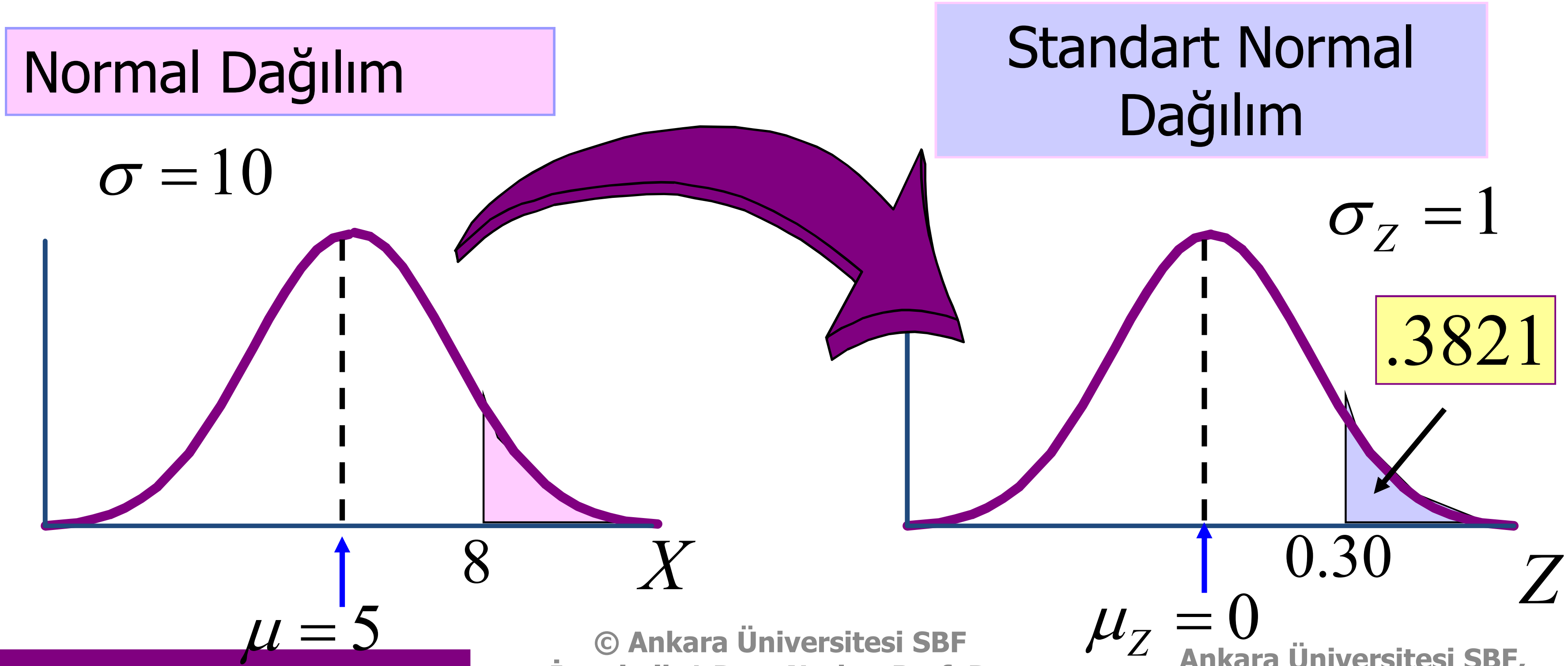
$$\mu_Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$



Örnek:

$$P(X \geq 8) = .3821$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 5}{10} = .30$$

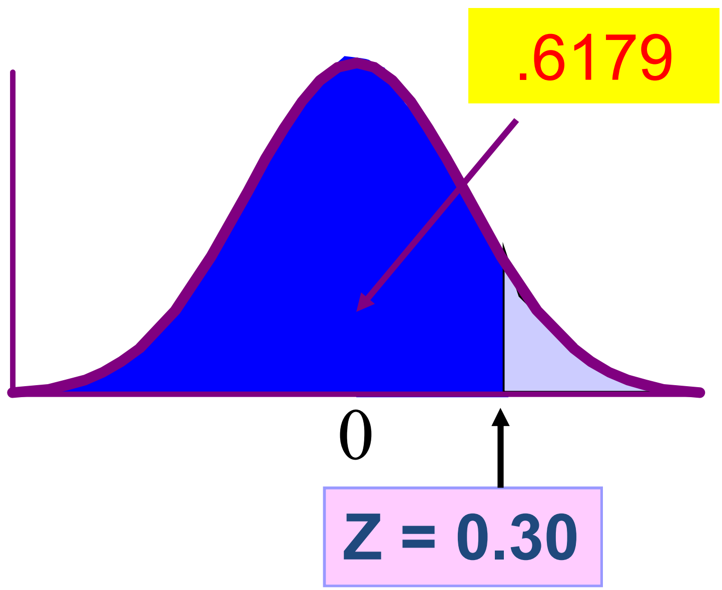


Örnek:

$$P(X \geq 8) = .3821$$

$$\mu_Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

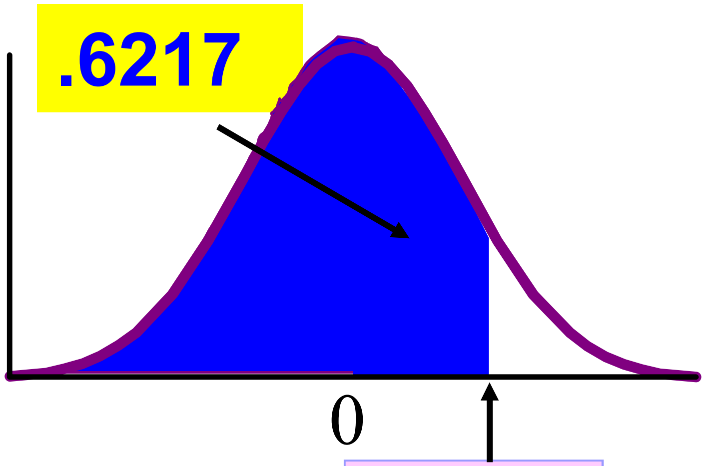
Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255



Bilinen Z değerleri için Olasılıkların Bulunması

0.1217 için z değeri nedir?

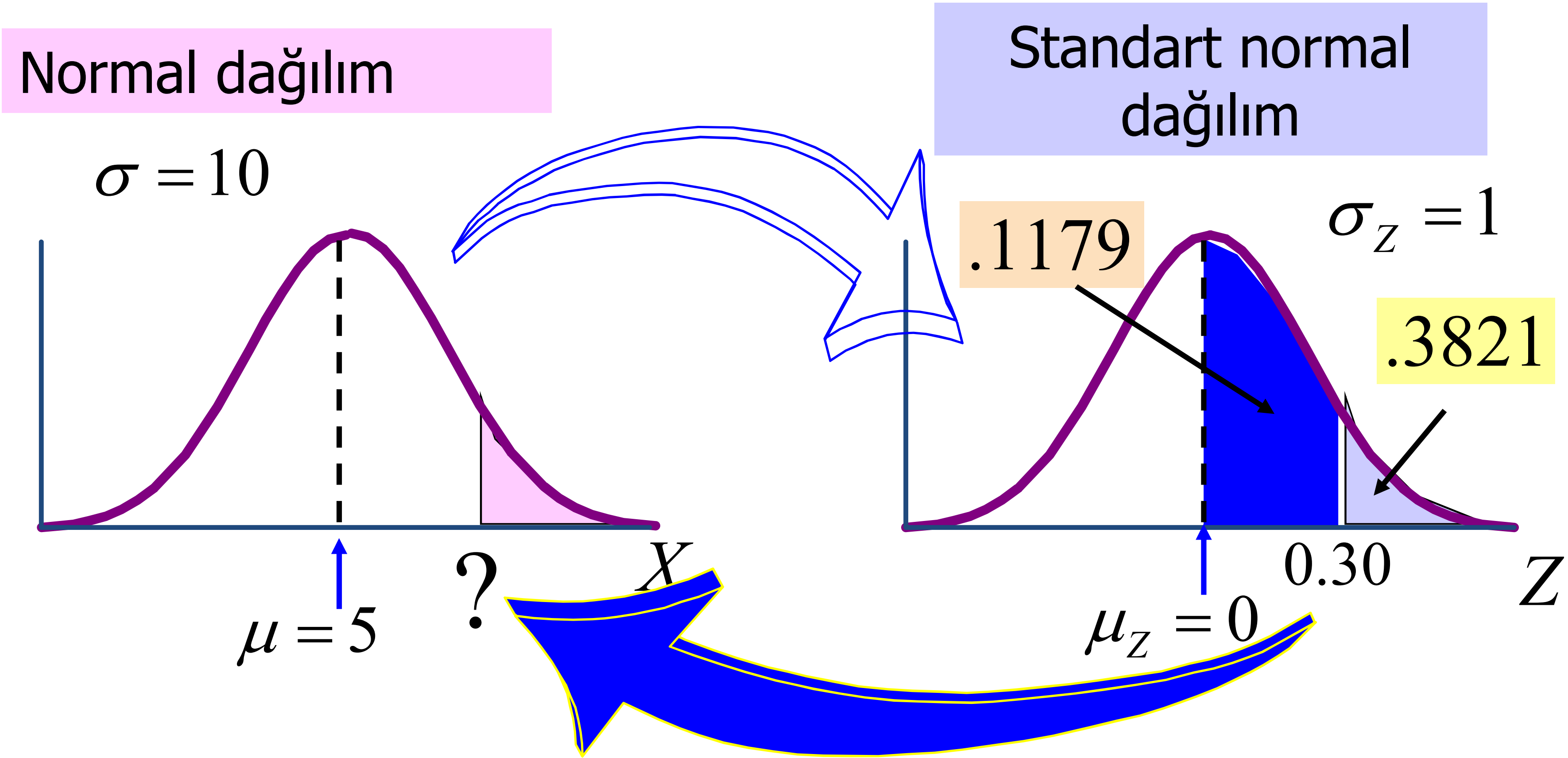
$\mu_Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$



$Z = .31$

Z	.00	.01	0.2
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255

Olasılığın Bilinmesi Durumunda X değerinin elde edilmesi



$$X = \mu + Z\sigma = 5 + (.30)(10) = 8$$

Normalite Varsayımının Değerlendirilmesi

- Sürekli değişkenlerin tamamı normal dağılıma sahip değildir.
- Veri setinin ne kadar normal dağıldığının analizi yapılacak tahminler için oldukça önemlidir.

Normalite Varsayımının Değerlendirilmesi

- Öncelikle küçük veri setleri için histogram veya gövde ve yaprak grafiği oluşturulmalı. Veri seti eğer simetrik dağılmış ise veri seti ile ilgili olarak normalite varsayımı yapılabilir.
- Tanımsal istatistikler hesaplanmalı
  - Ortalama, medyan mod eşit ise normalite varsayımı yapılabilir.
  - Çeyreklerarası açıklık yaklaşık olarak 1.33 σ ise normalite varsayımı yapılabilir.
  - Açıklık yaklaşık olarak 6 σ ise normalite varsayımı yapılabilir.

Normalite Varsayımının Değerlendirilmesi

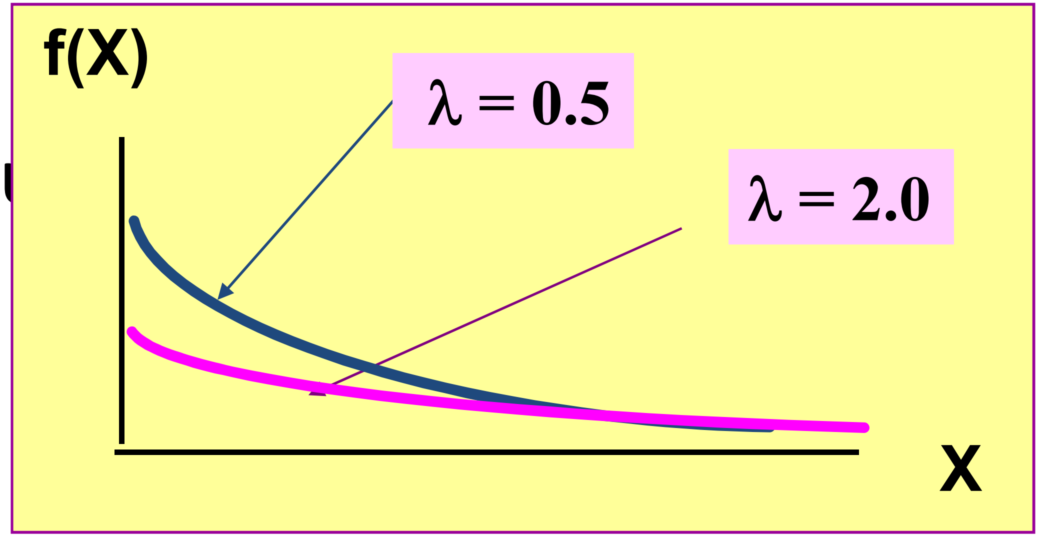
- Veri setinin dağılımının gözlemlenmesi:
  - Gözlem değerlerinin yaklaşık olarak 2/3'ü ortalamanın 1 standart sapma sağında ve solunda yer alıyor mu?
  - Gözlem değerlerinin yaklaşık olarak %95'i ortalamanın 2 standart sapma sağında ve solunda yer alıyor mu?
  - Gözlem değerlerinin yaklaşık olarak %99'u ortalamanın 3 standart sapma sağında ve solunda yer alıyor mu?

Üstel Olasılık Dağılımı

Üstel dağılım sürekli olasılık dağılımlarından bir diğeridir. Üstel dağılım, herhangi bir işin tamamlanması için geçen zamanı ölçümlemede kullanılan bir olasılık dağılımıdır. Üstel rastsal değişken, paralı otoyol geçişlerinde herhangi birinin gişelerden birine varışı ve ayrılışı arasında geçen zaman, ATM makinesine varış ve ayrılış arasında geçen zaman, bir yük gemisinin yüklenmesi için geçen zaman gibi olayların

Üstel Olasılık Dağılımı

- İki olay arasında geçen zaman yada uzaklığı tanımlamakta kullanılır
  - Kuyruklar için
- Yoğunluk fonksiyonu
  - $$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$



- Parametreler
  - $\mu = \lambda \qquad \sigma = \lambda$

Örnek

e.g.: Bir süper markette bir kasiyere 1 saatte gelen müşteri sayısı 30 dur. Her hangi birinin kasaya varışı ve ayrılışı arasında geçen sürenin 5 dakikadan daha fazla olama olasılığı nedir?

$$\lambda = 30 \qquad X = 5/60 \text{ hours}$$

$$P\left(\begin{array}{l}\text{Kasaya varış}\\ \text{zamanı}\end{array} > X\right) = 1 - P\left(\begin{array}{l}\text{Kasaya varış}\\ \text{zamanı}\end{array} \leq X\right)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-30(5/60)}\right)$$

$$= .0821$$