İstatistik 1
Bölüm 12
Tahmin: Hipotez Testleri 2

4/4/2018

Hipotez Testleri Yapılırken İzlenecek Aşamalar

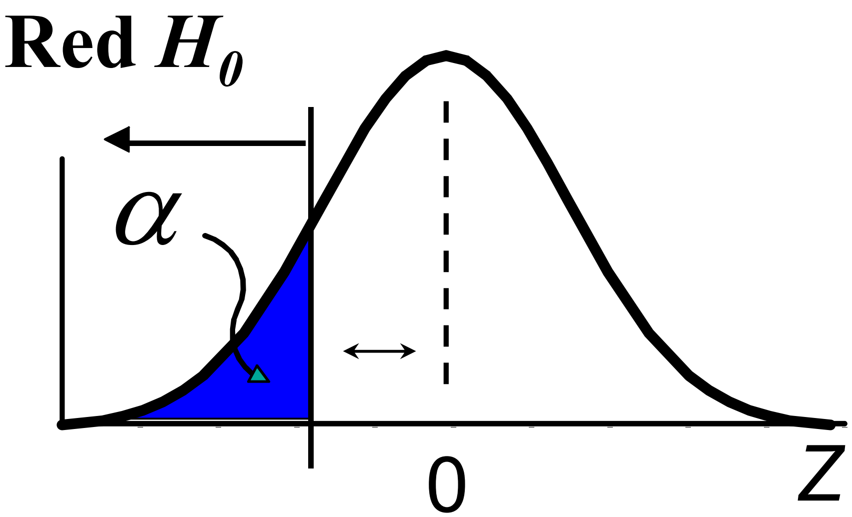
1. H_0 ve H_a'nın belirlenmesi 2. Test İstatistiğinin belirlenmesi 3. Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi 4. Test ist. hesaplanması 5. Çıkarım	$H_0 : \mu \geq 3$ $H_1 : \mu < 3$ $\alpha = .05$ $n = 100$ $Z\ test$

Populasyon ortalaması (bilinen) için Tek taraflı *Z* Testi

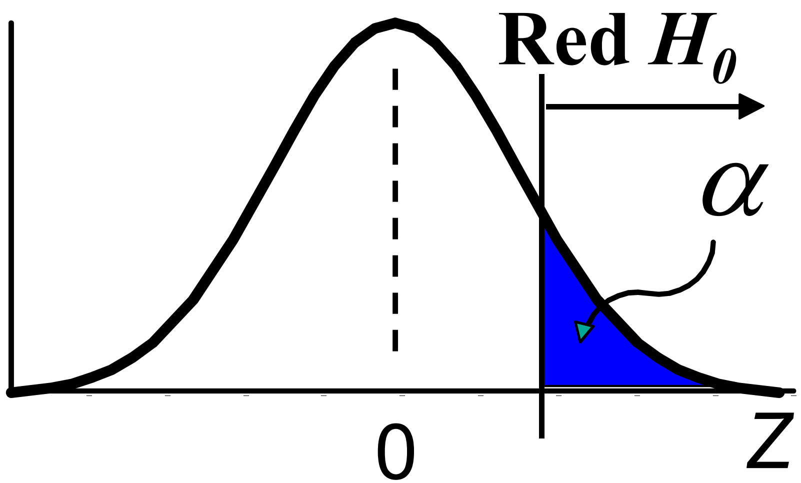
- Varsayımlar:
  - Populasyon normal dağılıma sahip
  - Normal değilse n büyük olmalı
  - Boş hipotez =, $\leq$ yada $\geq$ işaretine sahiptir
- *z* test istatistiği
  - $$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Red Bölgesi

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$
$$H_a: \mu < \mu_0$$



$$H_0: \mu \leq \mu_0$$
$$H_a: \mu > \mu_0$$



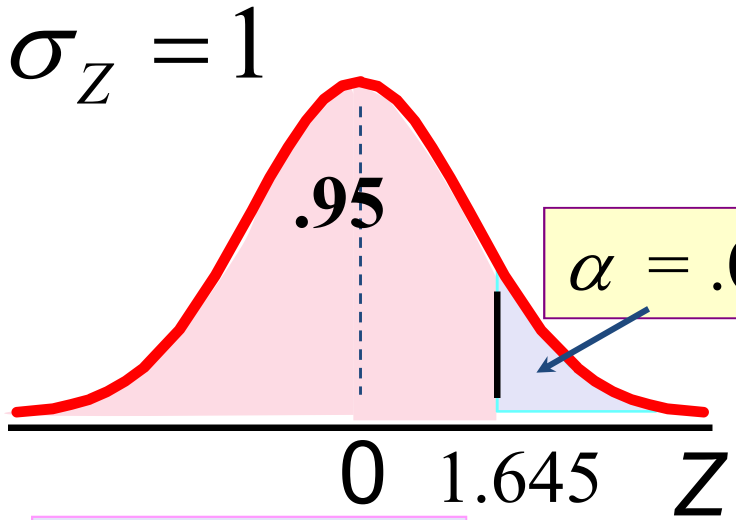
Örnek

Üretimden sorumlu müdür mısır gevreği kutularında ortalama 368 gr.'dan daha fazla mısır gevreği bulunduğunu iddia etmektedir. n =25 kutu için $\overline{X}$ = 372.5 ve σ=15 gram olarak saptandı. $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde test edin.

$$H_0: \ \mu = 368$$
$$H_a: \ \mu > 368$$

Kritik Değerin Bulunması

α = 0.05 olması durumunda z nedir?



Kritik değer = 1.645

Örnek

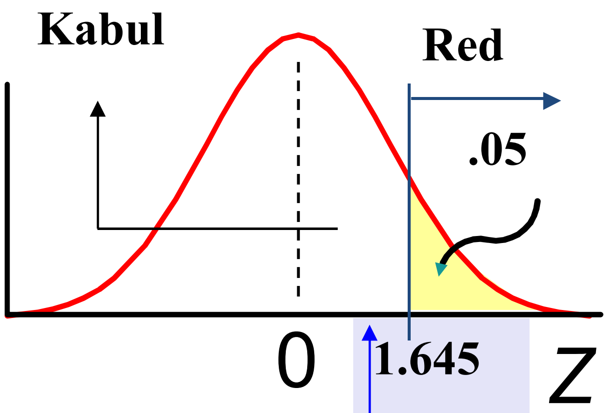
$H_0: \mu = 368$

$H_a: \mu > 368$

$\alpha = 0.5$

$n = 25$

Kritik değer: 1.645



1.50

Test istatistiği

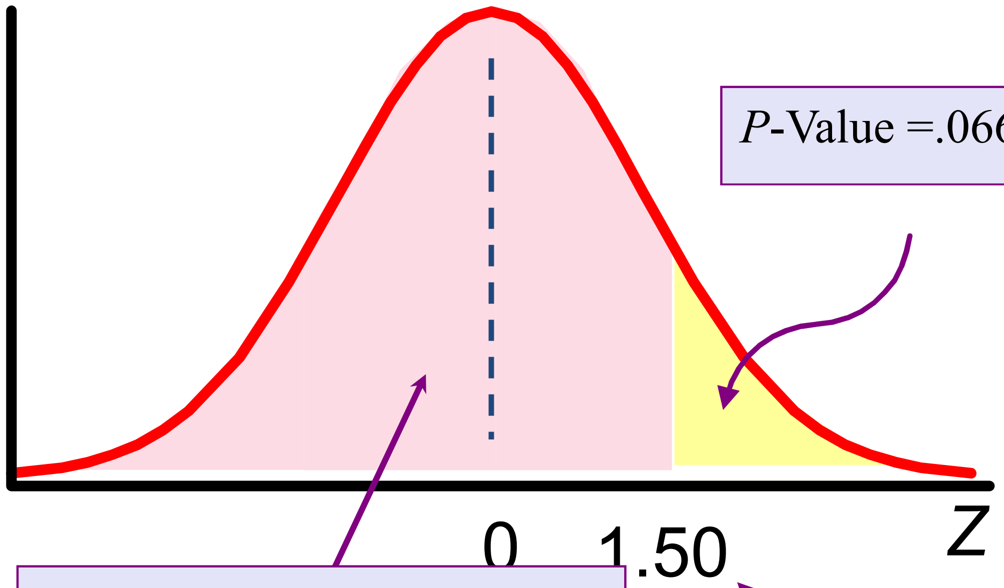
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = 1.50$$

Karar: Boş hipotez α = .05 anlamlılık düzeyinde kabul.

Sonuç: gerçek ortalamanın 368 gr.'dan fazla olduğuna ilişkin kanıt yoktur.

p –değeri ile Çözüm

p-değeri $P(Z \geq 1.50) = 0.0668$



P-Value =.0668

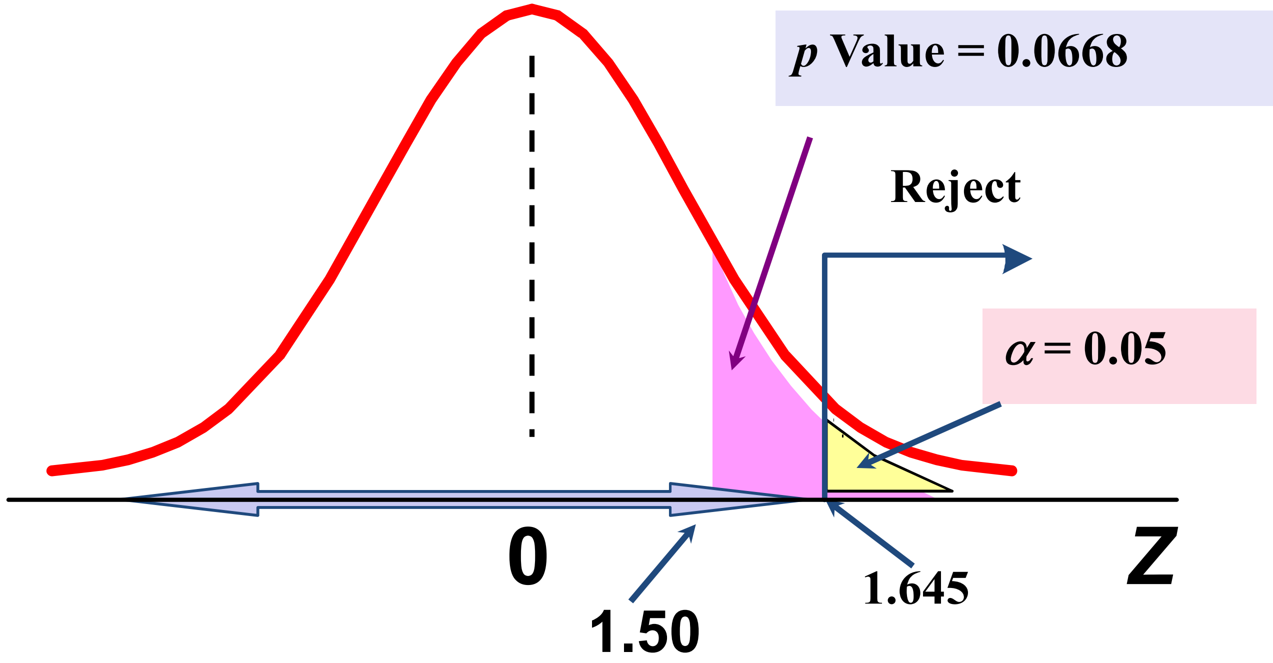
$$\begin{array}{r} 0.5000 \\ -\ .4332 \\ \hline .0668 \end{array}$$

Z tablosundan: 1.50'ye karşılık gelen değer 0.4332 dir

Hesaplanan z değeri

p –değeri ile Çözüm

(p-değeri = 0.0668) ≥ (α = 0.05)
Reddetme



Test istatistiği 1.50 kabul bölgesinde bulunuyor

Örnek

Mısır gevreği kutularında ortalama 368 gr mısır gevreği bulunmakta mı? n=25 kutu için $\overline{X} = 372.5$ ve σ=15 gram olarak saptandı. İddiayı $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde test edin.

$$H_0: \mu = 368$$
$$H_a: \mu \neq 368$$

Çözüm

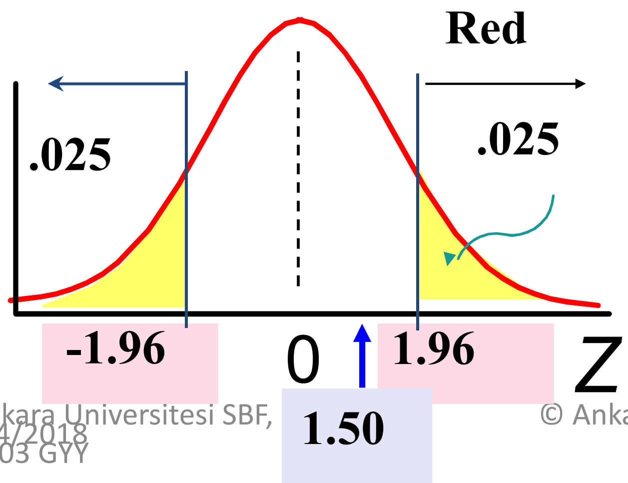
H_0: μ = 368

H_a: μ ≠ 368

$\alpha = 0.05$

$n = 25$

Kritik değer : ±1.96



Test İstatistiği:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{372.5 - 368}{15 / \sqrt{25}} = 1.50$$

Karar:

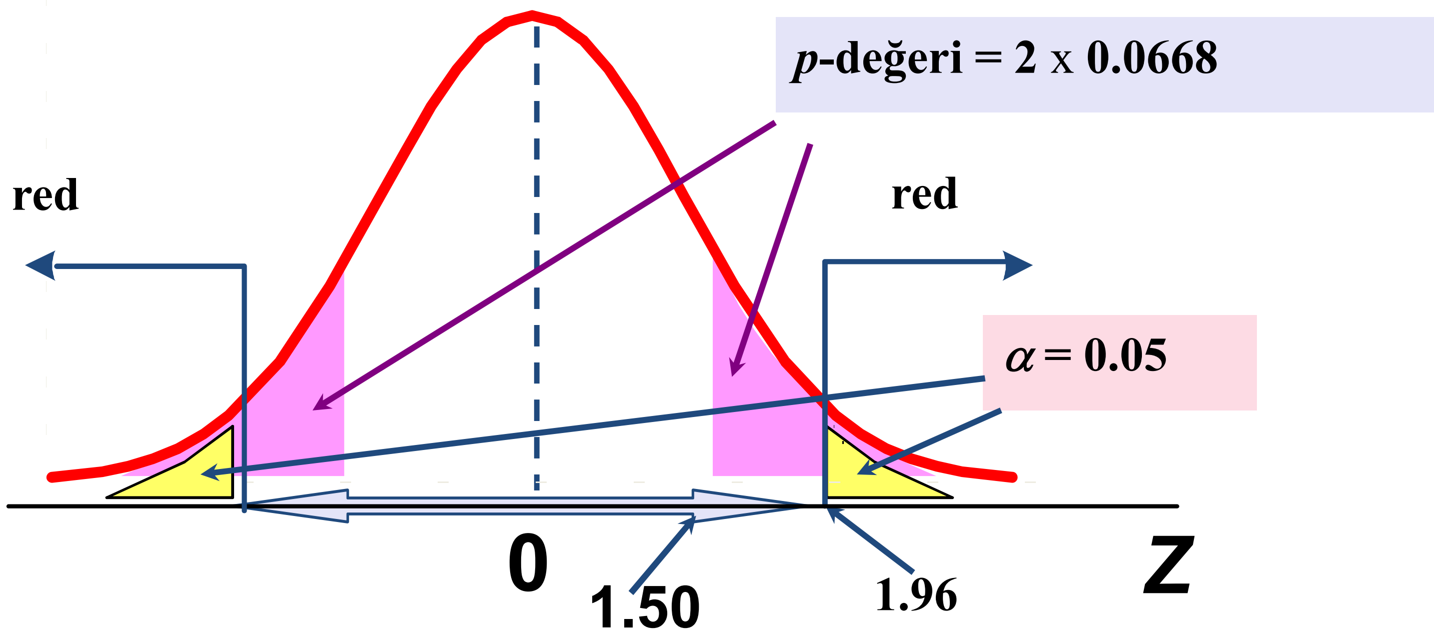
α = .05 ise H_0 ‘ı reddetme

Sonuç:

Gerçek ortalamanın 368’den farklı olduğuna ilişkin kanıt yok

p –değeri ile Çözüm

(p Value = 0.1336) ≥ (α = 0.05)
reddetme.



Test istatistiğinin hesaplanan değeri (1.50) kabul bölgesinde yer almakta

Güven Aralıkları İle Bağlantı

Ortalama $\overline{X} = 372.5, \ \sigma = 15 \text{ and } n = 25,$

%95'lik güven aralığı

$$372.5 - (1.96)15/\sqrt{25} \le \mu \le 372.5 + (1.96)15/\sqrt{25}$$

yada

$$366.62 \le \mu \le 378.38$$

Eğer oluşturulan bu aralık varsayılan ortalama değerini kapsıyorsa boş hipotez reddedilmez. Bu aralık 368 gr.'ı kapsıyor bu nedenle boş hipotez kabul edilir.

t Test: σ Bilinmiyor

- Varsayımlar
  - Populasyon normal dağılıma sahip
  - Normal dağılıma sahip değilse n büyük olmalı
- t test istatistiği *n-1* SD'ne sahip
  - $$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

Örnek

Üretimden sorumlu müdür mısır gevreği kutularında ortalama 368 gr.'dan daha az mısır gevreği bulunduğunu iddia etmektedir. n=36 kutu için $\overline{X}$ = 372.5 ve S=15 gram olarak saptandı. İddiayı $\alpha = 0.01$ anlamlılık düzeyinde test edin.

$H_0: \mu \geq 368$

$H_a: \mu < 368$

σ bilinmemekte

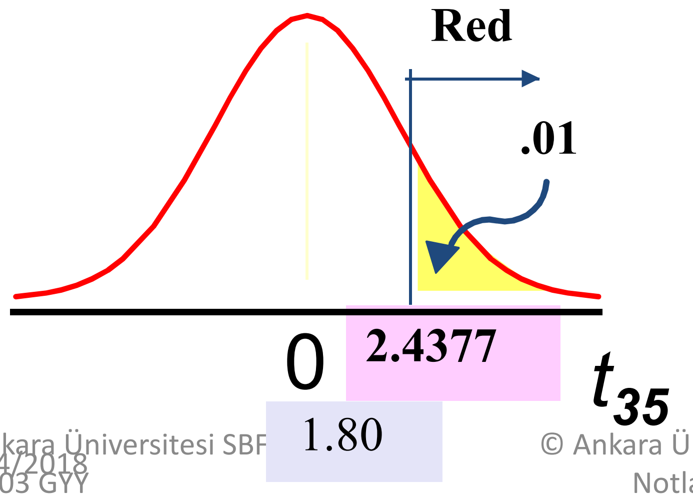
Çözüm

H_0: $\mu \leq 368$
H_a: $\mu > 368$

$\alpha = 0.01$

$n = 36$, df = 35

Kritik Değer : 2.4377



Test İstatistiği:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{372.5 - 368}{15/\sqrt{36}} = 1.80$$

Karar:

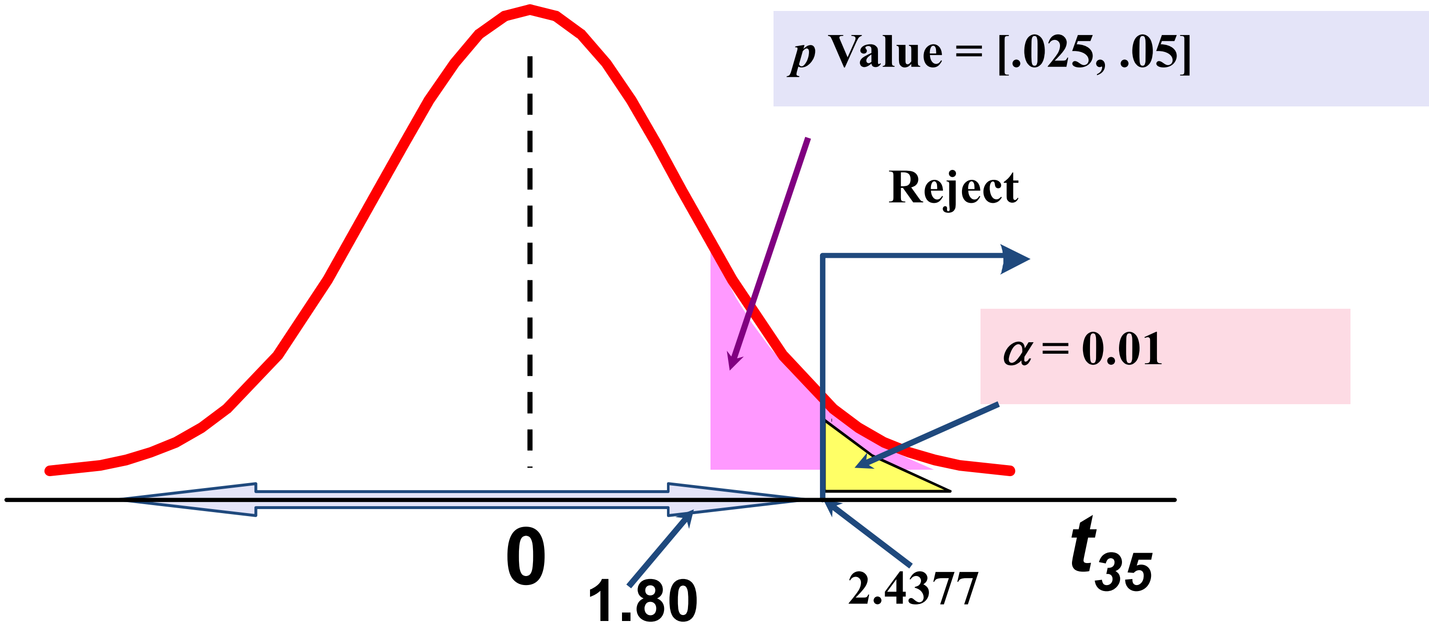
Boş hipotez red

Sonuç:

Gerçek ortalamanın 368'den fazla olduğuna ait kanıt yok

p –değeri ile Çözüm

(p değeri .025 ve .05 arasında) ≥ (α = 0.01). reddetme.



Normal Populasyonun Oranı İçin Hipotez Testleri

- Normal populasyon oranı için hipotez testleri oluştururken şu varsayımlar yapılmaktadır:
- 1. kategorik değişkenler içermektedir.
- 2. Başarılı ve başarısız olmak üzere iki olası sonuç söz konusudur.
- 3. Populasyon içindeki başarılı sonuçların oranı *p* başarısız sonuçların oranı ise (1-*p*) ile gösterilmektedir.
- 4. Örnek içinde başarılı sonuçların başarısız sonuçlara oranı $\bar{p}$ ile gösterilmektedir.

Normal Populasyonun Oranı İçin Hipotez Testleri

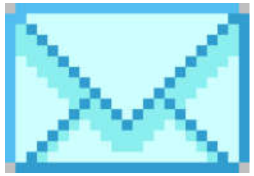
- 5. np ve n(1-p) en az 5 ise $\bar{p}$'nin ortalama $\mu_{\bar{p}} = p$ ve

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- standart sapma ile yaklaşık olarak normal dağılıma sahip olduğu varsayılır.

Örnek: *Oran İçin z testi*

E-ticaret yapan bir firma e-postalarının %4'üne cevap verildiğini iddia etmektedir. Bu iddianın testi için 500 e-posta gönderildi ve 25 cevap alındı. $\alpha = .05$ Anlamlılık düzeyinde iddiayı test ediniz.



Kontrol

$$np = 500(.04) = 20 \geq 5$$

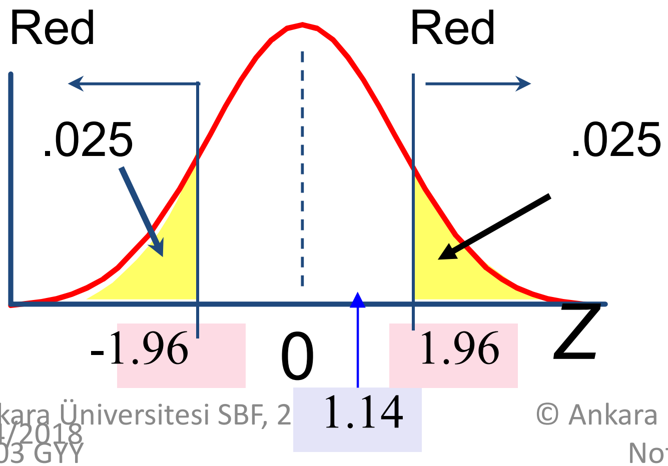
$$n(1-p) = 500(1-.04) = 480 \geq 5$$

Çözüm: Oran için z Test

$$H_0: p = .04$$
$$H_a: p \neq .04$$

$$\alpha = .05$$
$$n = 500$$

Kritik Değer : ± 1.96



Test İstatistiği

$$Z \cong \frac{p_S - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{.05 - .04}{\sqrt{\frac{.04(1-.04)}{500}}} = 1.14$$

Karar:

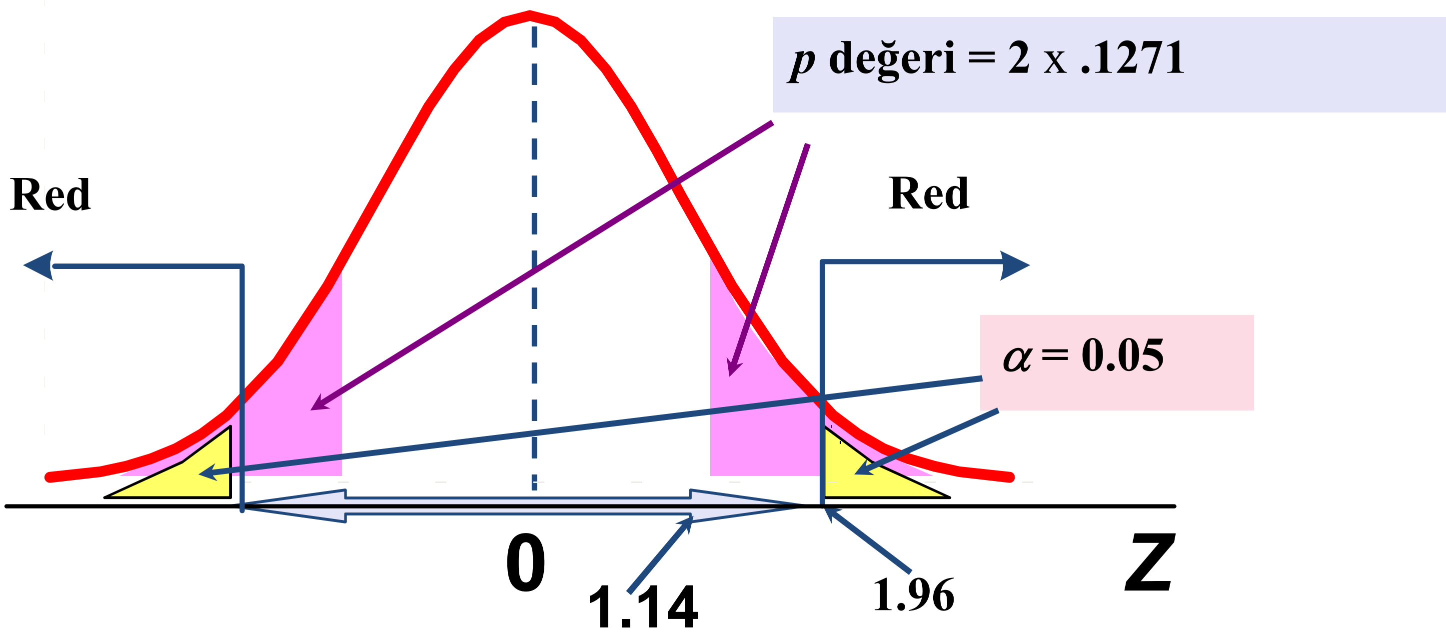
Reddetme

Sonuç:

İddiayı reddetmek için elimizde yeterli kanıt yoktur

p –değeri ile Çözüm

$(p$ değeri $= 0.2542) \geq (\alpha = 0.05)$.
Reddetme



Normal Dağılıma Sahip Populasyonun Varyansı İçin Hipotez Testi

- **Aşama 1:** Hipotezlerin belirlenmesi:
- 1. $H_0: \sigma^2 = \sigma^2_0$

  $H_a: \sigma^2 \neq \sigma^2_0$

  Aşama 2: Test istatistiğinin belirlenmesi:

$$\chi^2_{n-1,\ \alpha} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Normal Dağılıma Sahip Populasyonun Varyansı İçin Hipotez Testi

- **Aşama 3:**

α ve red bölgesinin belirlenmesi: Hesaplanan χ^2 değeri tablo χ^2 değerinden büyük ise boş hipotez reddedilir.

- Çift taraflı bir hipotez testinde: $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\ \alpha/2}$ veya $\chi^2 < \chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2}$ ise boş hipotez reddedilir.
- Tek taraflı bir hipotez testinde ise yukarıda oluşturulmuş olan olası üç hipotez testinden ikincisi için $\chi^2 < \chi^2_{n-1,\ 1-\alpha}$ ve üçüncüsü için $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\ \alpha}$ olması durumunda boş hipotez reddedilir.

Normal Dağılıma Sahip Populasyonun Varyansı İçin Hipotez Testi

- **Aşama 4:**

  Test istatistiğinin hesaplanması: Yukarıdaki aşama 2'de yer alan formül kullanılarak test istatistiği hesaplanır

Aşama 5: Sonuç :

$\chi^2_{hesaplanan} > \chi^2_{tablo}$ ise H_0 reddedilir.

Örnek

- **Örnek 8.9:** Mikro dalga fırın üretimi yapan bir fabrika, üretim sürecinde kullandığı bazı makineleri yenilemiştir. Yenileme sonunda rassal örnekleme yöntemi ile belirlenen 16 farklı gün için fabrikada yeni makinelerin ürettiği günlük mikro dalga fırın sayıları sırasıyla şöyledir:
  - 1256 1025 1355 1050 1111 1225 1333 1089 1000 1001 1090 1095 1155 1185 1325 1055

Örnek

- Fabrika yöneticileri günlük üretimdeki dalgalanmalardan rahatsız olmaktadır. Varyansın 500'ün üzerinde olması yönetim için istenmeyen bir durumdur. Populasyon varyansının 800'den fazla olmaması gerektiğine ilişkin iddiayı %10 anlamlılık düzeyinde test ediniz.

Çözüm:

- **Çözüm:**
- Yukarıdaki veriler için:
- Varyans: $S^2 = 14354.11$
- standart sapma: $S = 119.8$
- **Aşama 1:** Hipotezlerin belirlenmesi:
- H_0: $\sigma^2 \leq 800$
- H_a: $\sigma^2 > 800$

Çözüm:

- **Aşama 2:** Test istatistiğinin belirlenmesi:

- $\chi^2_{n-1,\ \alpha}$ = $$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$$

- **Aşama 3:** α ve red bölgesinin belirlenmesi: Hesaplanan χ^2 değeri tablo χ^2 değerinden büyük ise boş hipotez reddedilir.
- $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\ \alpha}$ olması durumunda boş hipotez reddedilir.

Çözüm:

- **Aşama 4:** Test istatistiğinin hesaplanması: Yukarıdaki aşama 2'de yer alan formül kullanılarak test istatistiği hesaplanır.

- $\chi^2_{n-1,\ \alpha} =$

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(16-1)14354.11}{800} = 269.139$$

Çözüm:

- **Aşama 5:** Sonuç : $\chi^2 > \chi^2_{n-1, \alpha}$ olması durumunda boş hipotez (H_0) reddedilir.
- reddedilir.
- $\chi^2_{n-1, \alpha} = \chi^2_{15, 0.1}$ $22.3072 < \chi^2 = 269.139$ olduğu için boş hipotez reddedilir.
-

Normal Dağılıma Sahip İki Populasyonun Ortalamalarının Farkları İçin Hipotez Testlerinin Oluşturulması

- **Populasyon Varyansının Bilinmesi ve n $\geq$ 30 Olması Durumunda Uygun Çiftlerler İçin Populasyon ortalamalarının farklarına İlişkin z Testi**
  - Ortalamaları μ_1 ve μ_2 ve varyansları ve olan normal dağılıma sahip iki populasyonun her birinden rassal yöntemle n (eşit) sayıda gözlemden oluşan iki ayrı örnek seti elde edilerek gözlem değerlerinin farkları için ortalama ve standart sapmayı hesaplamak ve ortalamaların farkları için hipotez testleri oluşturmak ve bunları test etmek mümkündür.

Normal Dağılıma Sahip İki Populasyonun Ortalamalarının Farkları İçin Hipotez Testlerinin Oluşturulması

- **Varsayımlar:**
- 1. Her iki populasyon normal dağılıma sahiptir.
- 2. Rassal olarak oluşturulacak örneklerde yer alacak gözlemler birbirleri ile uyumludur (birbirine bağımlı).
- 3. Varyans biliniyor veya bilinmiyor.

Normal Dağılıma Sahip İki Populasyonun Ortalamalarının Farkları İçin Hipotez Testlerinin Oluşturulması

- 5. Test istatistiği:

$$z = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sigma_d / \sqrt{n}}$$

- veya

$$z = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}}$$

Örnek:

- Aşağıda yer alan verileri kullanarak normal dağılıma sahip iki populasyonun ortalamalarının farkları için aşağıda verilmiş olan hipotezleri %5 anlam düzeyinde test ediniz.
- $\bar{d}$ = 21 S_d^2 = 1088, $n_1 = n_2 = 10$ S_d = 32.98 α = %5
- H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$
- H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$

Çözüm:

- **Çözüm:**
- **Aşama 1:** Hipotezlerin belirlenmesi: Hipotezler, aşağıdaki gibi olası üç biçimde oluşturulabilirler.
- **Aşama 2:** Test istatistiğinin belirlenmesi:
- $$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}}$$
- biçimindedir.

Çözüm:

- **Aşama 3:** α ve red bölgesinin belirlenmesi: Hesaplanan t değeri tablo t değerinden büyük ise boş hipotez reddedilir.
- $t > t_{n-1,\ \alpha/2}$ olması durumunda boş hipotez reddedilir.
- **Aşama 4:** Test istatistiğinin hesaplanması:

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}} = \frac{21}{32.98 / \sqrt{10}} = 2.012$$

Çözüm:

- **Aşama 5:** Sonuç : $t_{hesaplanan} > t_{tablo}$ ise H_0 reddedilir.
- $t > t_{n-1}, \alpha$ ise boş hipotez reddedilir.
- $2.012 > t_{9,\ 0.05}$
- $2.012 > 1.833$ olduğu için boş hipotez reddedilir.
-

Dikkat Edilecek Noktalar

- Rassal örnekleme yaparak yanlı karar alınması önlenmeli
- İnsanı konu alan çalışmalar yapmak için ilgili kişi veya gruplardan izin alınmalı
- Data seti üzerinde oynama yaparak sonucu etkilememeli
- Anlamlılık düzeyini seçerken dikkatli olunmalı ve hata yapmanın olası maliyetleri göz önünde bulun durulmalıdır.

Dikkat Edilecek Noktalar

- Elde edilen araştırma sonuçları nasıl olursa olsun yayınlanmalı. Bilgi saklanmamalıdır.