

İstatistik 2

Bölüm 5

Genel Tekrar 5

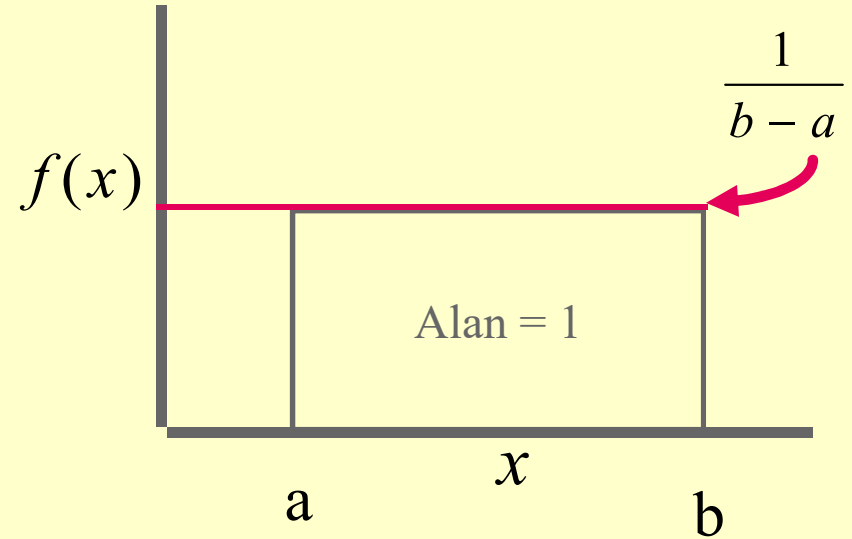
Sürekli Olasılık Dağılımı

- Sürekli rassal değişken
 - > Değerleri belli aralıklarda toplanır
 - > Boşluk bulunmaz
- Sürekli Olasılık Dağılımı
 - > Sürekli rassal değişkenin alacağı değerlerin dağılımını gösterir
- En önemli Sürekli Olasılık Dağılımı:
 - > Normal olasılık dağılımıdır.

Düzcün Dağılım

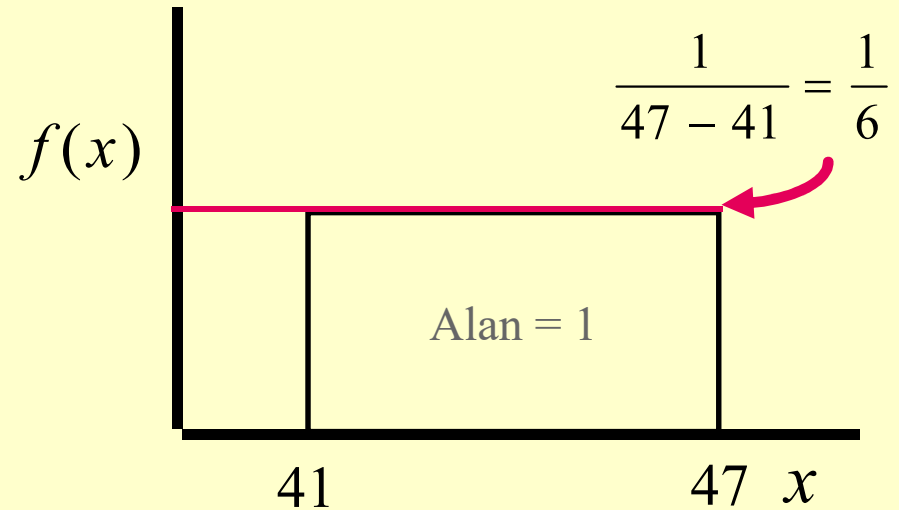
Sürekli olasılık dağılımlarından biridir. $f(X)$ 'in yüksekliği her yerde aynıdır ve rastsal değişkenin değeri belli aralıklarda yer alır

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \text{ için} \\ 0 & \text{diđerleri için} \end{cases}$$



Düzensün Dağılım: Örneđ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{47-41} & 41 \leq x \leq 47 \quad \text{için} \\ 0 & \text{diđer değerler için} \end{cases}$$



Düzcün Dağılım: Ortalama ve Standart Sapma

O r t a l a m a

$$\mu = \frac{a + b}{2}$$

O r t a l a m a

$$\mu = \frac{41 + 47}{2} = \frac{88}{2} = 44$$

Standart sapma

$$\sigma = \frac{b - a}{\sqrt{12}}$$

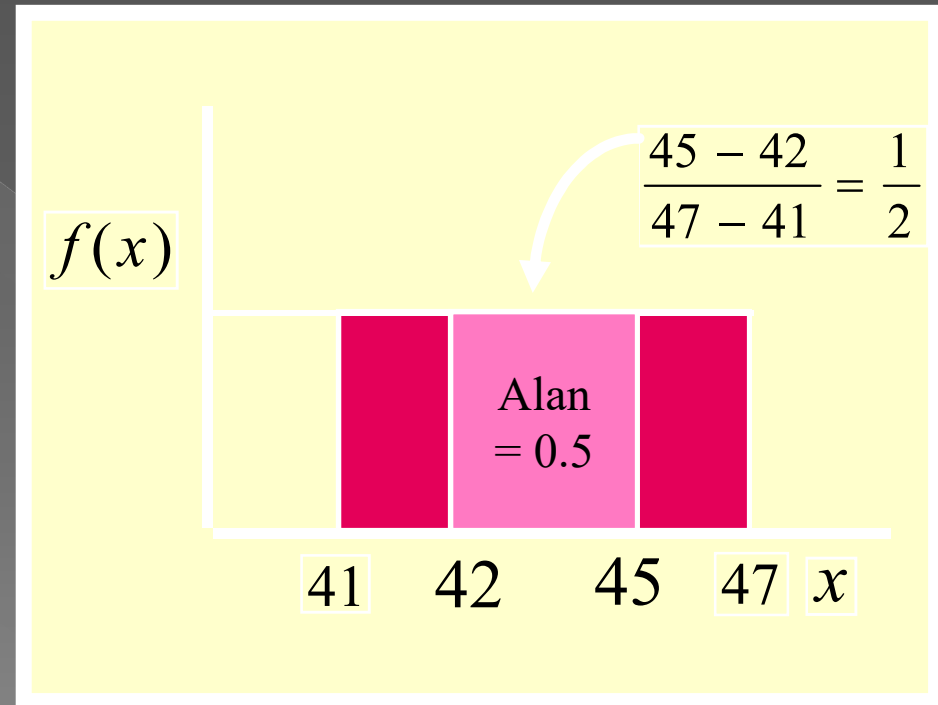
Standart sapma

$$\sigma = \frac{47 - 41}{\sqrt{12}} = \frac{6}{3.464} = 1.732$$

Düzcün Dağılım: Örnek

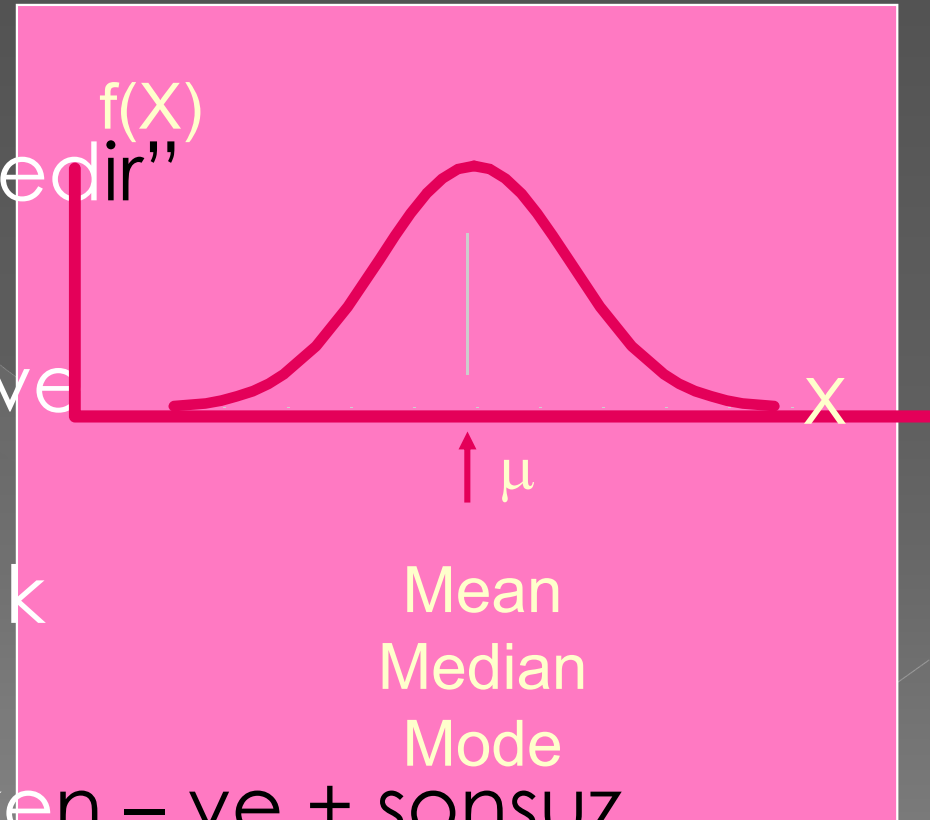
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

$$P(42 \leq X \leq 45) = \frac{45 - 42}{47 - 41} = \frac{1}{2}$$



Normal Olasılık Dağılımı

- Özellikleri:
- “Çan eğrisi biçimindedir”
- Simetriktir
- Ortalama, medyan ve mod eşittir
- Çeyrekler arası açıklık
- 1.33σ
- Normal rassal değişken – ve + sonsuz aralığında değerler alırlar



Matematiksel Model

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}$$

$f(X)$: Rassal değişken X 'in yoğunluk fonksiyonu

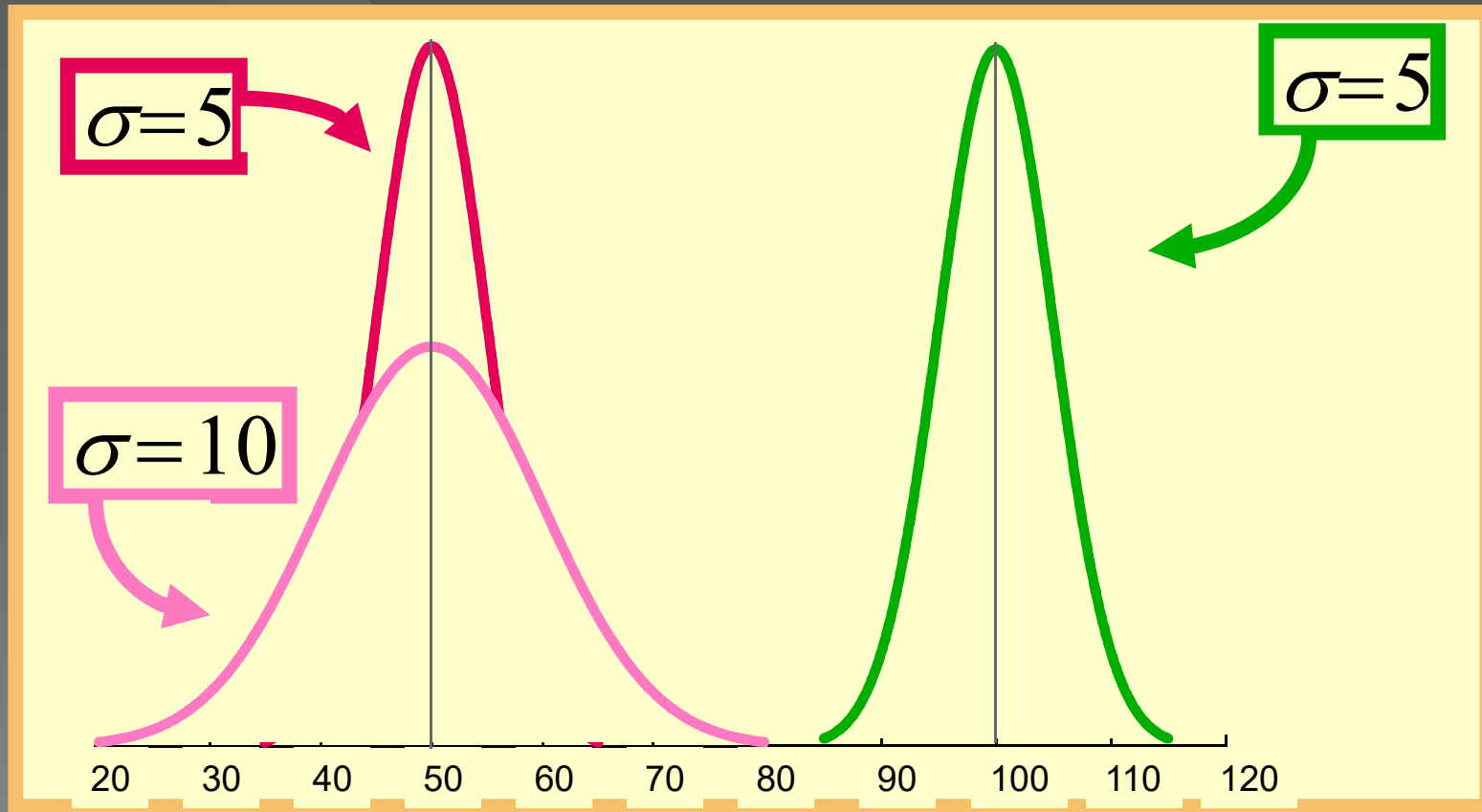
$$\pi = 3.14159; \quad e = 2.71828$$

μ : populasyon ortalaması

σ : populasyon standart sapması

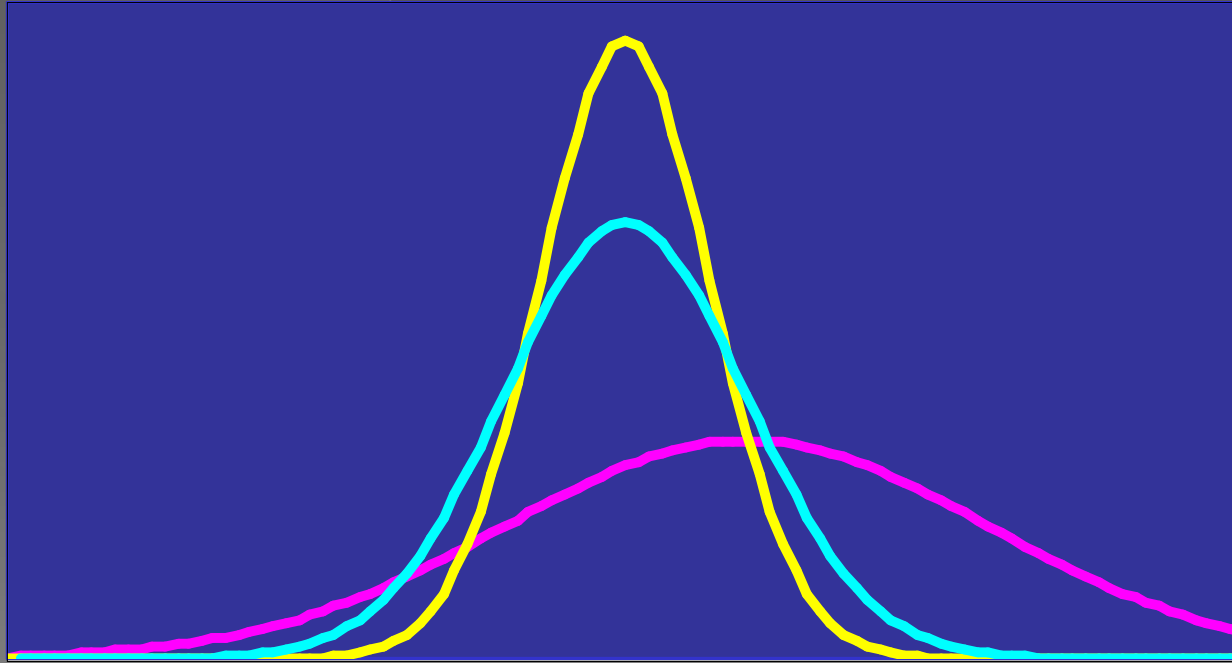
X : rastsal değişkenin değeri ($-\infty < X < \infty$)

Farklı Ortalama ve Standart Sapmalar İçin Normal Dağılım Eğrileri



Normal Olasılık Dağılımı

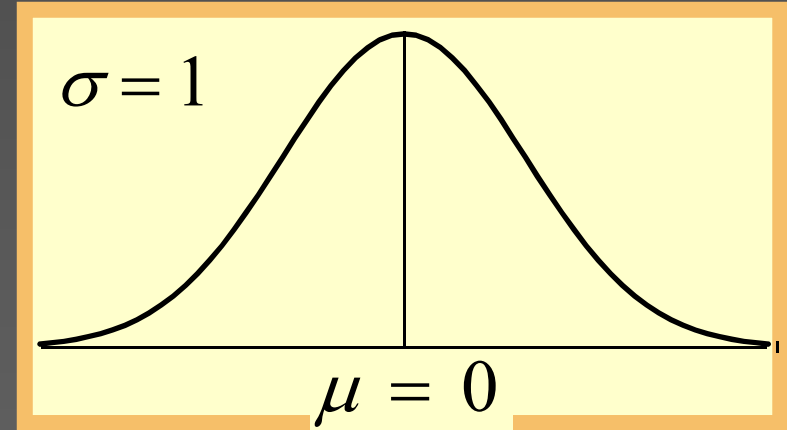
Sonsuz sayıda normal olasılık dağılımı bulunmaktadır



Parametreler σ ve μ , değiştiğinde normal olasılık dağılımının şekli değişir

Standart Normal Dağılım

- Normal bir dağılım
 - Ortalaması sıfır ve
 - Standart sapması bir
- Z formülü
 - Normal dağılımı standardize etmektedir
- Z değeri
 - Z formülü ile hesaplanır

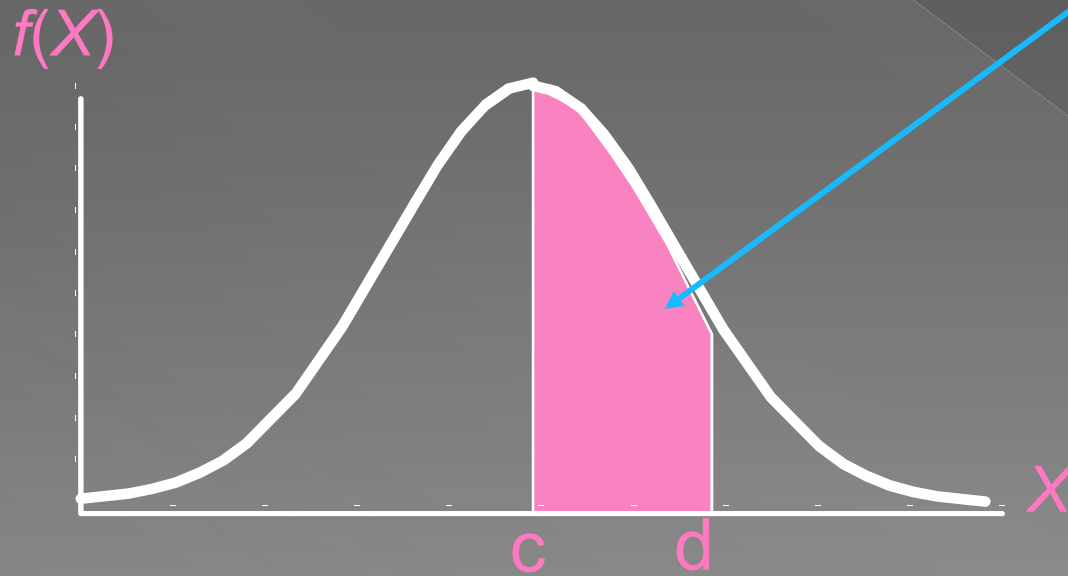


$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

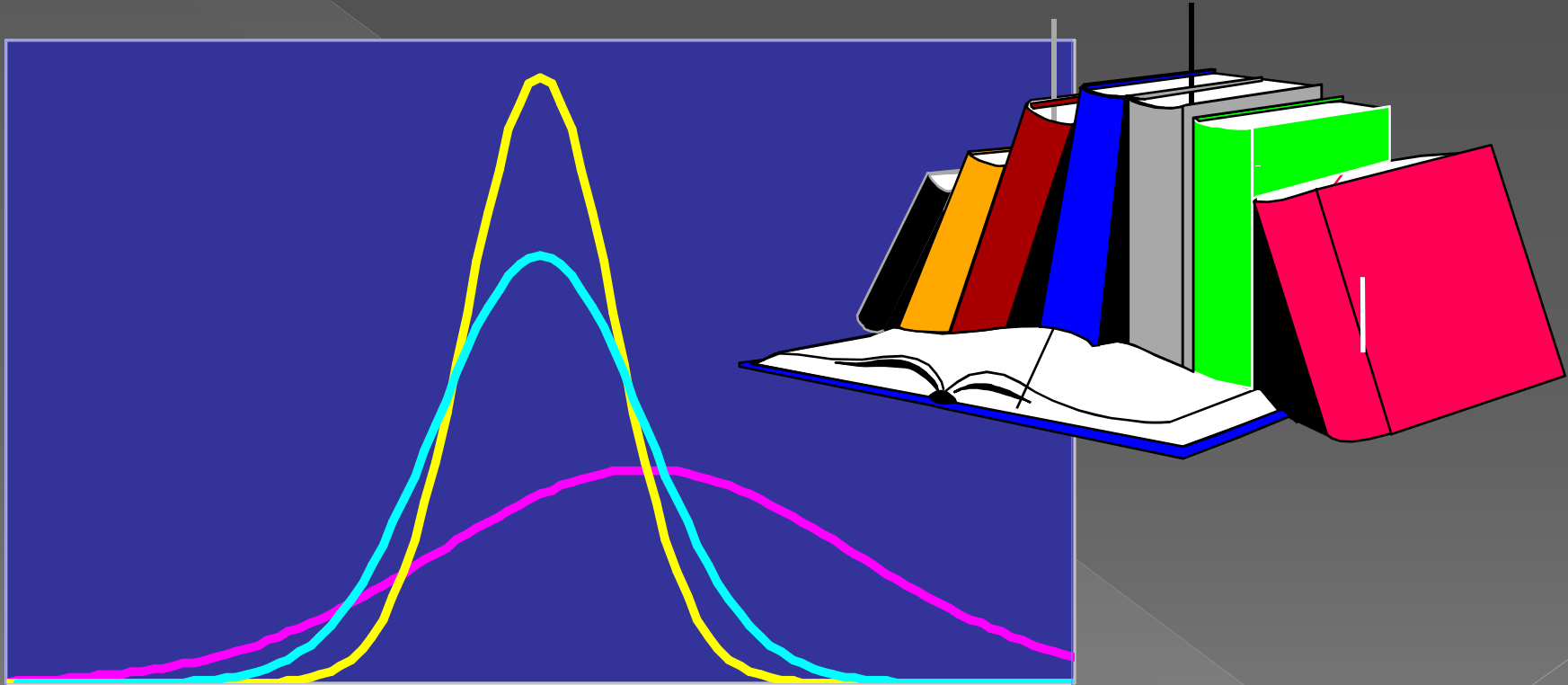
Olasılıkların Bulunması

Olasılık eğrinin altında kalan alana eşittir!

$$P(c \leq X \leq d) = ?$$



Hangi Tablo Kullanılmalı?



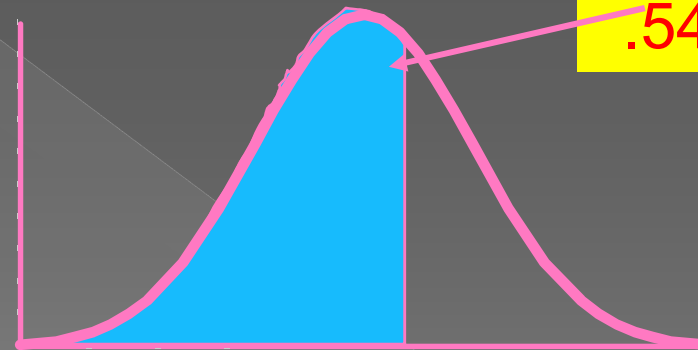
Sonsuz sayıda normal dağılım eğrisinin bulunması sonsuz sayıda tabloya bakılacağı anlamı taşımaz!

Çözüm: Standart Normal Olasılık Dağılım Tablosu

Standart normal olasılık dağılım tablosundan bir kesit

$$\mu_Z = 0 \quad \sigma_Z = 1$$

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255



Olasılıklar

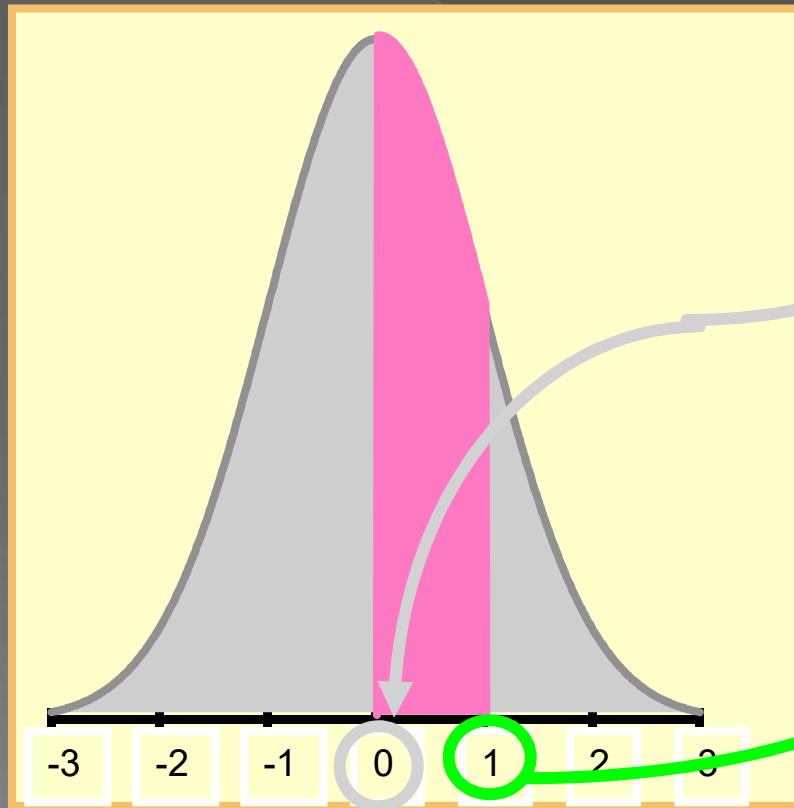
$$Z = 0.12$$

Sadece bir tabloya bakmak

Z Tablosu

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.10	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.20	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.30	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.90	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.00	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.10	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.20	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
2.00	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
3.00	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.40	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.50	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

Standart Normal Olasılık Dağılım Tablosunun Kullanımı



$$P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$$

Z	0.00	0.01	0.02
0.00	0.0000	0.0040	0.0080
0.10	0.0398	0.0438	0.0478
0.20	0.0793	0.0832	0.0871
1.00	0.3413	0.3438	0.3461
1.10	0.3643	0.3665	0.3686
1.20	0.3849	0.3869	0.3888

Z Formülünün Kullanımı: Örnek

$X \mu=485$, ve $\sigma=105$ ile normal dağılmıştır

$$P(485 \leq X \leq 600) = P(0 \leq Z \leq 1.10) = .3643$$

$$X = 485,$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{485 - 485}{105} = 0$$

$$X = 600,$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{600 - 485}{105} = 1.10$$

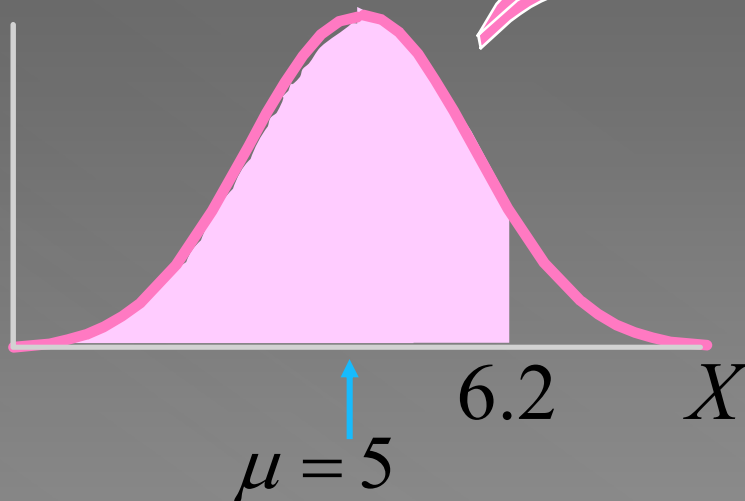
Z	0.00	0.01	0.02
0.00	0.0000	0.0040	0.0080
0.10	0.0398	0.0438	0.0478
1.00	0.3413	0.3438	0.3461
1.10	0.3643	0.3665	0.3686
1.20	0.3849	0.3869	0.3888

Standart Normal Dağılım: Örnek

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{6.2 - 5}{10} = 0.12$$

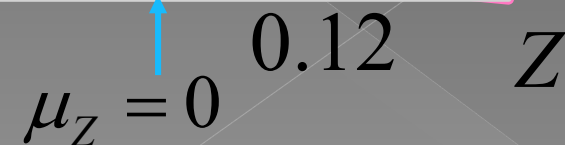
Normal Dağılım

$\sigma = 10$



Standart Normal Dağılım

$\sigma_Z = 1$



Örnek:

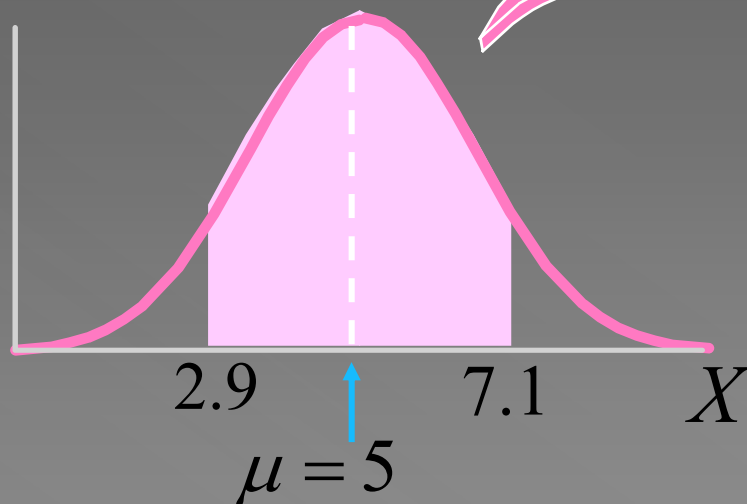
$$P(2.9 \leq X \leq 7.1) = .1664$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{2.9 - 5}{10} = -.21$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{7.1 - 5}{10} = .21$$

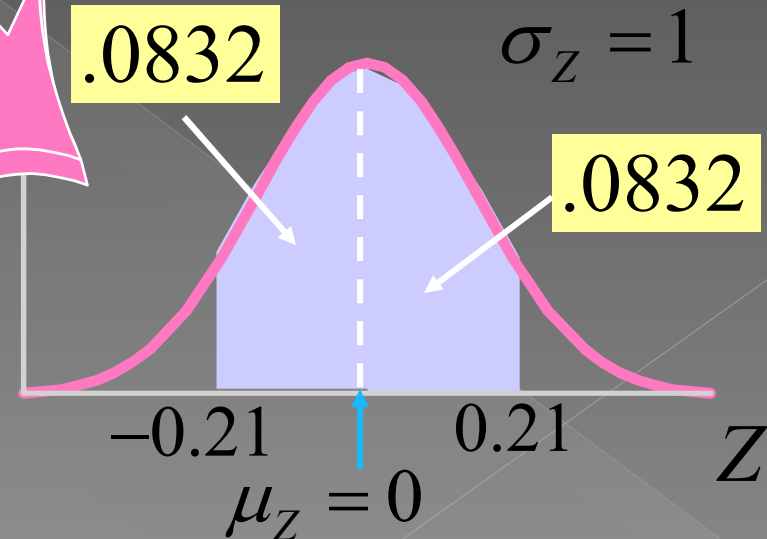
Normal Dağılım

$\sigma = 10$



Standart Normal Dağılım

$\sigma_Z = 1$



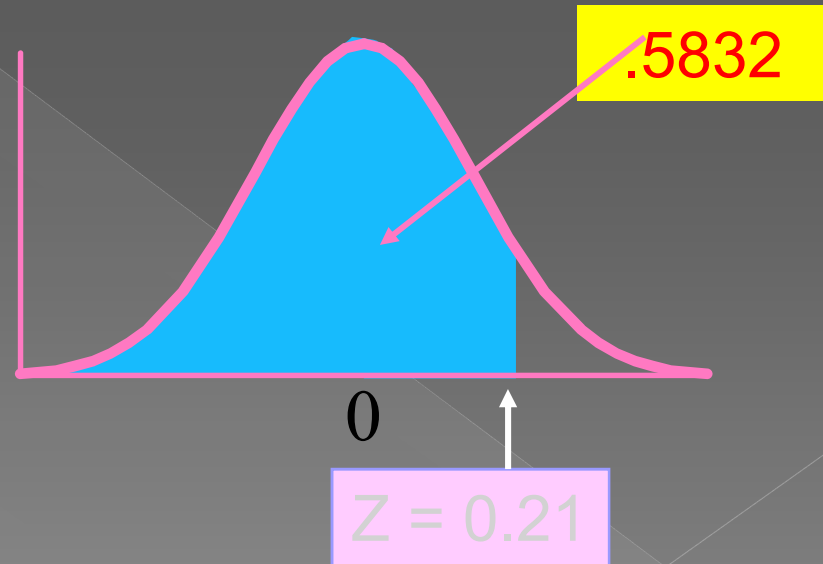
Örnek:

$$P(2.9 \leq X \leq 7.1) = .1664$$

Birikimli standart normal olasılık dağılım tablosu

$$\mu_Z = 0 \quad \sigma_Z = 1$$

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255



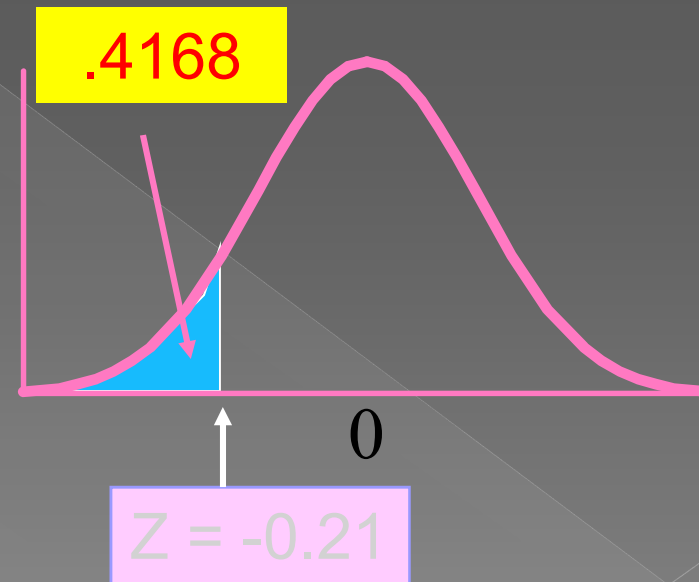
Örnek:

$$P(2.9 \leq X \leq 7.1) = .1664$$

Cumulative Standardized Normal Distribution Table (Portion)

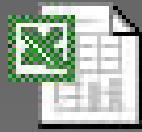
Z	.00	.01	.02
-03	.3821	.3783	.3745
-02	.4207	.4168	.4129
-0.1	.4602	.4562	.4522
0.0	.5000	.4960	.4920

$$\mu_Z = 0 \quad \sigma_Z = 1$$



Normal Dağılım

- Normal olasılıkların hesaplanması



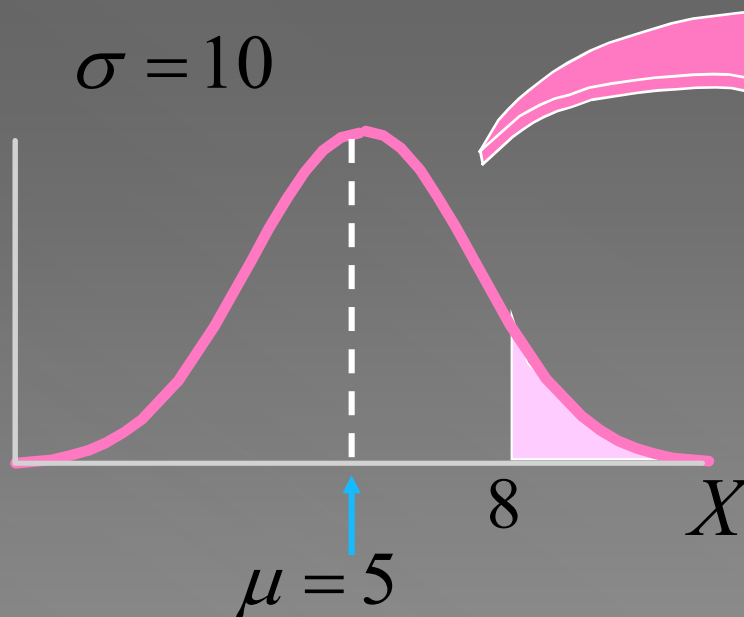
Microsoft Excel
Worksheet

Örnek: $P(X \geq 8) = .3821$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 5}{10} = .30$$

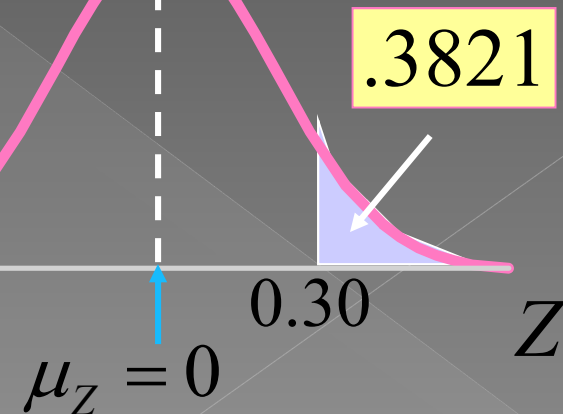
Normal Dağılım

$\sigma = 10$



Standart Normal Dağılım

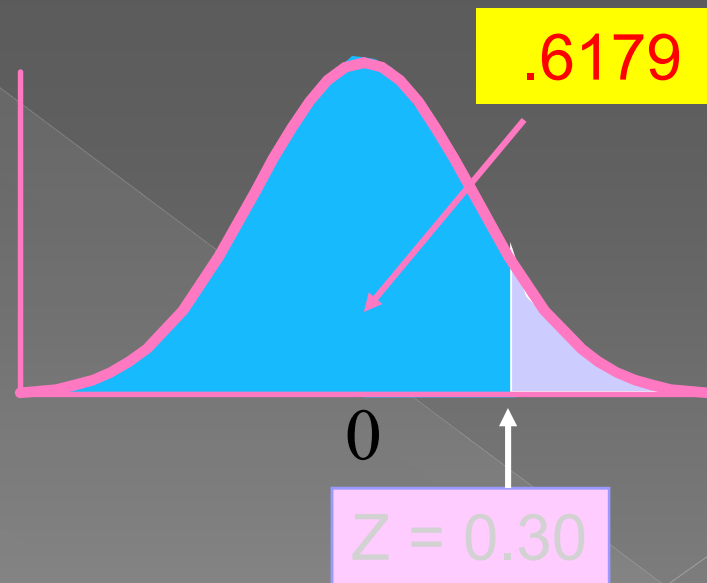
$\sigma_Z = 1$



Örnek: $P(X \geq 8) = .3821$

$$\mu_Z = 0 \quad \sigma_Z = 1$$

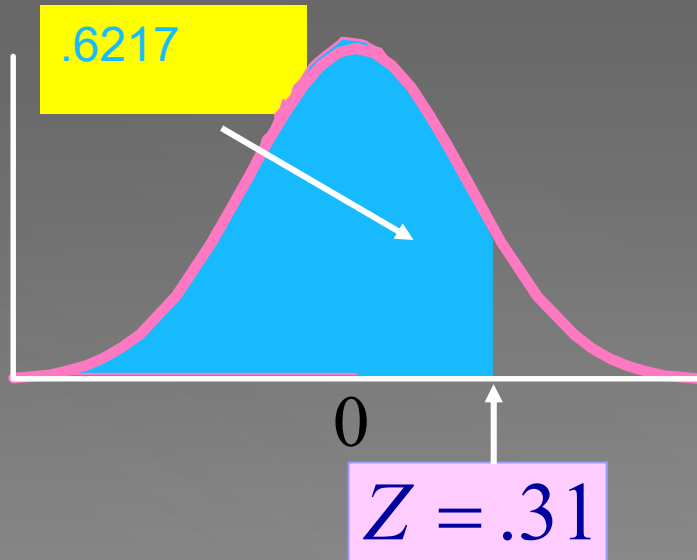
Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255



Bilinen Z değerleri için Olasılıkların Bulunması

0.1217 için z değeri
nedir?

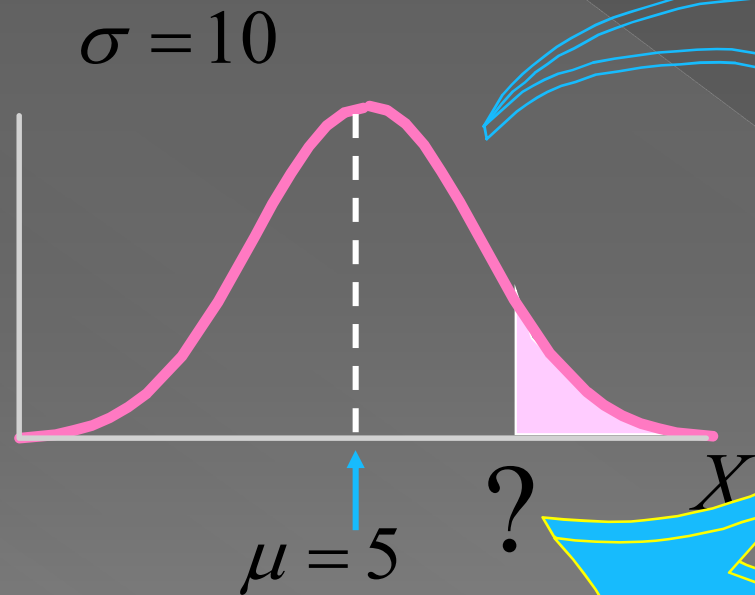
$$\mu_Z = 0 \quad \sigma_Z = 1$$



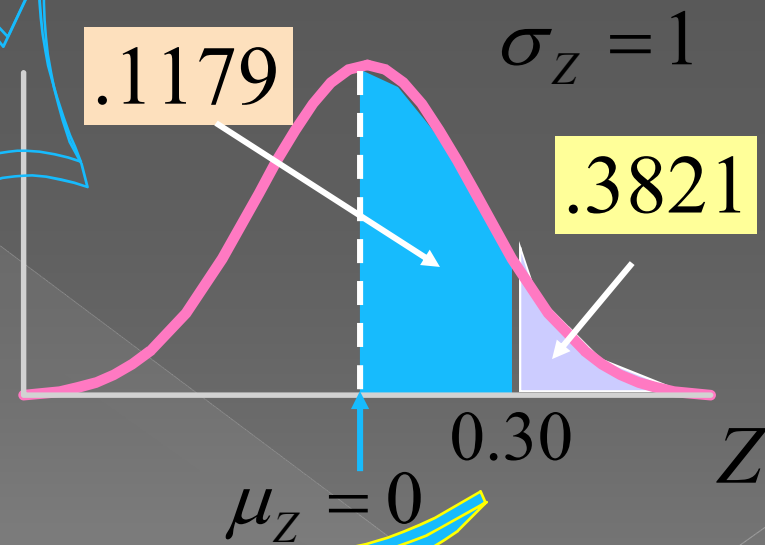
Z	.00	.01	0.2
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255

Olasılığın Bilinmesi Durumunda X değerinin elde edilmesi

Normal dağılım



Standart normal dağılım



$$X = \mu + Z\sigma = 5 + (.30)(10) = 8$$

Binom Dağılımın Normal Dağılıma Yaklaşması

- Binom değerleri normal değerlere dönüştürebiliriz
- Prosedür
 - Binom parametreler normal parametrelere dönüştürülür
 - Aralık ϕ \circ ◆ 0 ve n arasında mı? Eğer böyle ise devam; değilse, normal dağılım yaklaştırması kullanılamaz
 - Süreklilik için düzelt
 - Normal dağılım problemini çöz

- Normal dağılım, örnek sayısı çok büyük olan binom dağılım problemlerinde olasılıkların tahmin edilmesinde kullanılır.
- Binom problemlerinin normal dağılım yaklaşımı ile çözülebilmesi için binomdaki n ve p , normal dağılımdaki μ ve σ^2 'ya dönüştürülür.

Dönüştürme

- Dönüştürme denklemi

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

- Dönüştürme: Örnek:

X binom dağılıma sahip olsun

$$P(X \geq 25 \mid n = 60 \text{ ve } p = .30).$$

$$\mu = n \cdot p = (60)(.30) = 18$$

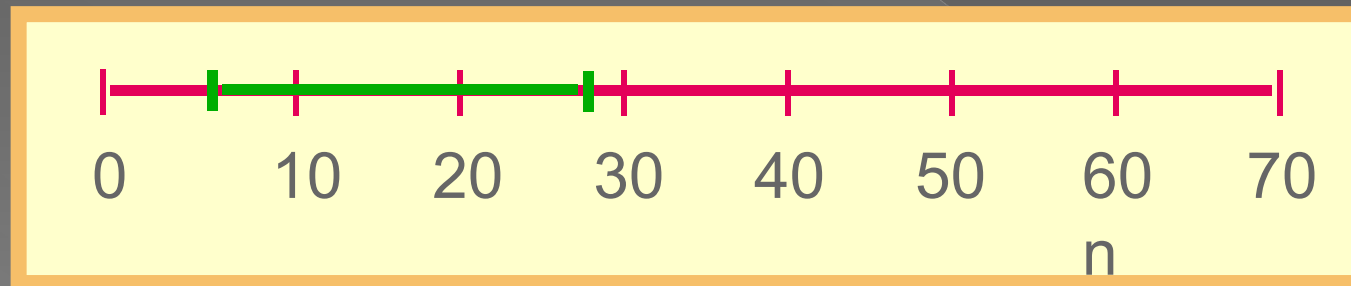
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{(60)(.30)(.70)} = 3.55$$

Aralık Kontrolü

$$\mu \pm 3\sigma = 18 \pm 3(3.55) = 18 \pm 10.65$$

$$\mu - 3\sigma = 7.35$$

$$\mu + 3\sigma = 28.65$$



Binomun Normal Dağılıma Yaklaştırılması: Süreklilik İçin Düzeltme

Belirlenen değerler	Düzeltilme
$X >$	+ .50
$X \geq$	- .50
$X <$	- .50
$X \leq$	+ .05
$\leq X \leq$	- .50 and + .50
$< X <$	+ .50 and - .50

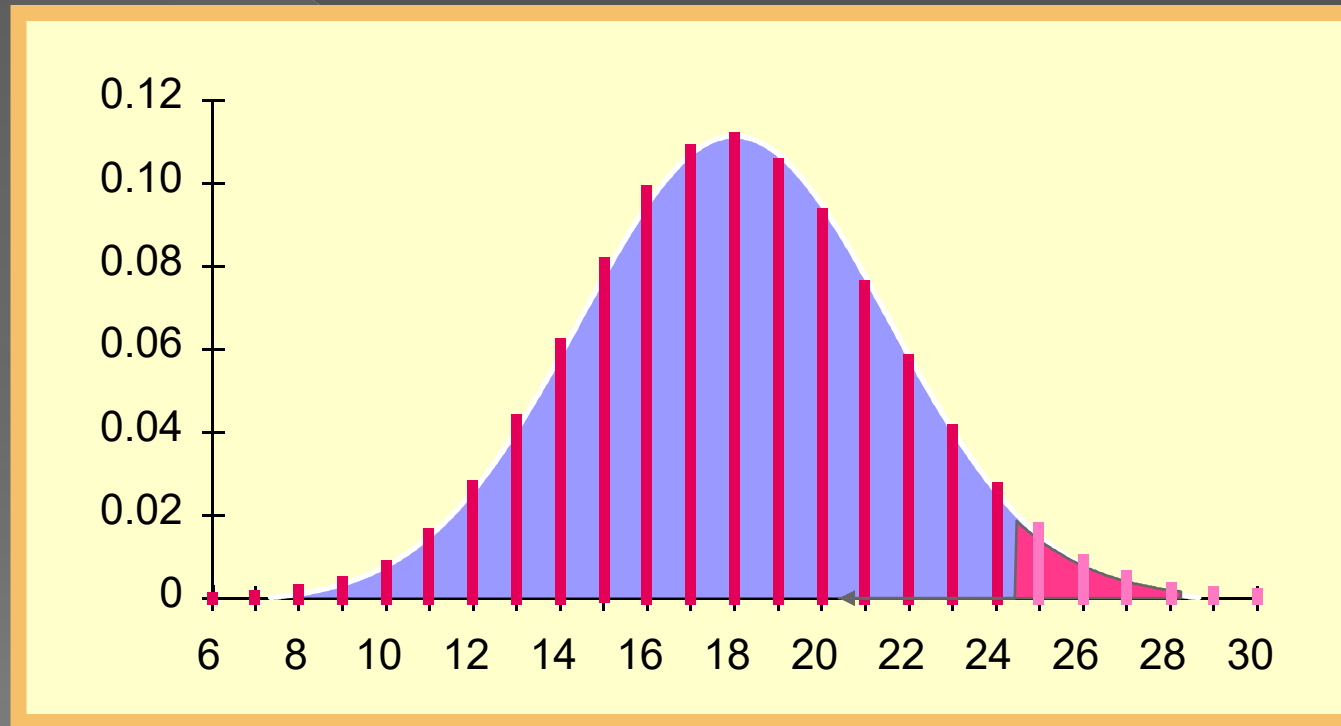
Binom Olasılık

$$P(X \geq 25 | n = 60 \text{ and } p = .30)$$

Normal dağılım ile yaklaştırma

$$P(X \geq 24.5 | \mu = 18 \text{ ve } \sigma = 3.55).$$

Binomun Normal Dağılım Yakınlaştırma Grafiği



Binomun Normal Dağılım Yakınlaştırma:
Hesaplama

X	P(X)
25	0.0167
26	0.0096
27	0.0052
28	0.0026
29	0.0012
30	0.0005
31	0.0002
32	0.0001
33	<u>0.0000</u>
Toplam	0.0361

Normal Dağılım Yakınlaştırması

$$P(X \geq 24.5 | \mu = 18 \text{ and } \sigma = 3.55)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{24.5 - 18}{3.55}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.83)$$

$$= .5 - P(0 \leq Z \leq 1.83)$$

$$= .5 - .4664$$

$$= .0336$$

Normalite Varsayımının Değerlendirilmesi

- Sürekli değişkenlerin tamamı normal dağılıma sahip değildir.
- Veri setinin ne kadar normal dağıldığının analizi yapılacak tahminler için oldukça önemlidir.

Normalite Varsayımının Değerlendirilmesi

- Öncelikle küçük veri setleri için histogram veya gövde ve yaprak grafiği oluşturulmalı. Veri seti eğer simetrik dağılmış ise veri seti ile ilgili olarak normalite varsayımı yapılabilir.
- Tanımsal istatistikler hesaplanmalı
 - > Ortalama, medyan mod eşit ise normalite varsayımı yapılabilir.
 - > Çereklerarası açıklık yaklaşık olarak 1.33σ ise normalite varsayımı yapılabilir.
 - > Açıklık yaklaşık olarak 6σ ise normalite varsayımı yapılabilir.

Normalite Varsayımının Değerlendirilmesi

- Veri setinin dağılımının gözlemlenmesi:
 - > Gözlem değerlerinin yaklaşık olarak $2/3$ 'ü ortalamanın \pm standart sapma sağıında ve solunda yer alıyor mu?
 - > Gözlem değerlerinin yaklaşık olarak %95'i ortalamanın 2 standart sapma sağıında ve solunda yer alıyor mu?
 - > Gözlem değerlerinin yaklaşık olarak %99'u ortalamanın 3 standart sapma sağıında ve solunda yer alıyor mu?

Üstel Olasılık Dağılımı

Üstel dağılım sürekli olasılık dağılımlarından bir diğeridir. Üstel dağılım, herhangi bir işin tamamlanması için geçen zamanı ölçümlemede kullanılan bir olasılık dağılımıdır. Üstel rassal değişken, paralı otoyol geçişlerinde herhangi birinin gişelerden birine varışı ve ayrılışı arasında geçen zaman, ATM makinesine varış ve ayrılış arasında geçen zaman, bir yük gemisinin yüklenmesi için geçen zaman gibi olayların

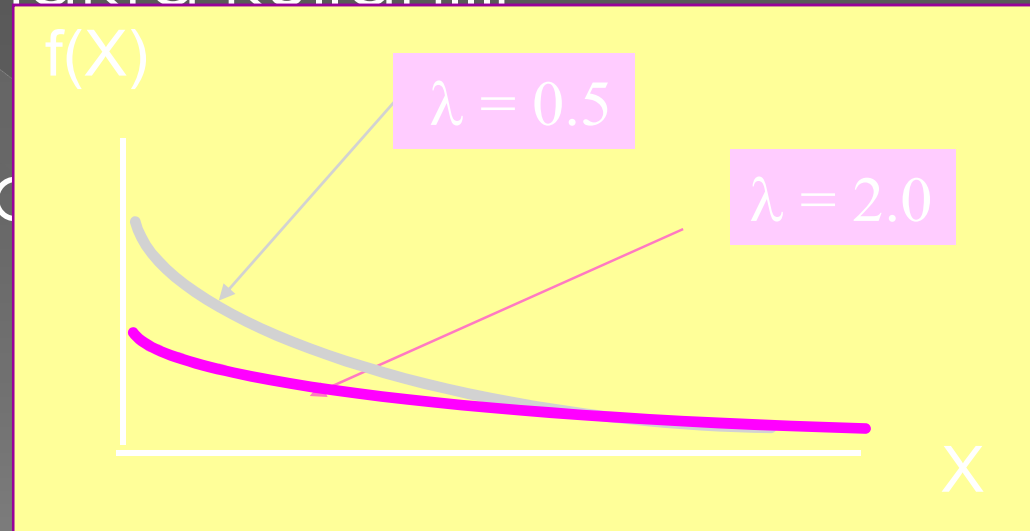
Üstel Olasılık Dağılımı

- İki olay arasında geçen zaman yada uzaklığı tanımlamakta kullanılır

- > Kuyruklar için

- Yoğunluk fonksiyonu

- >
$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$



- Parametreler

- > $\mu = \lambda$ $\sigma = \lambda$

Örnek

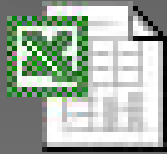
Bir süper markette bir kasiyere 1 saatte gelen müşteri sayısı 30 dur. Her hangi birinin kasaya varışı ve ayrılışı arasında geçen sürenin 5 dakikadan daha fazla olma olasılığı nedir?

$$\lambda = 30 \quad X = 5 / 60 \text{ hours}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Kasaya varış zamanı} > X) &= 1 - P(\text{Kasaya varış zamanı} \leq X) \\ &= 1 - (1 - e^{-30(5/60)}) \\ &= .0821 \end{aligned}$$

Üstel Olasılık Dağılımı

- Üstel Olasılık Dağılımının hesaplanması



Microsoft Excel
Worksheet