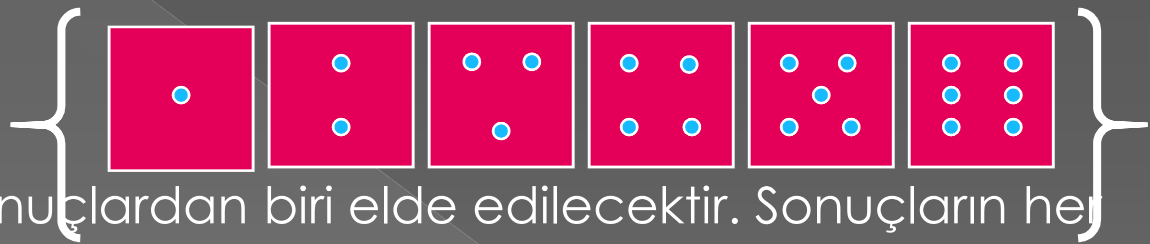
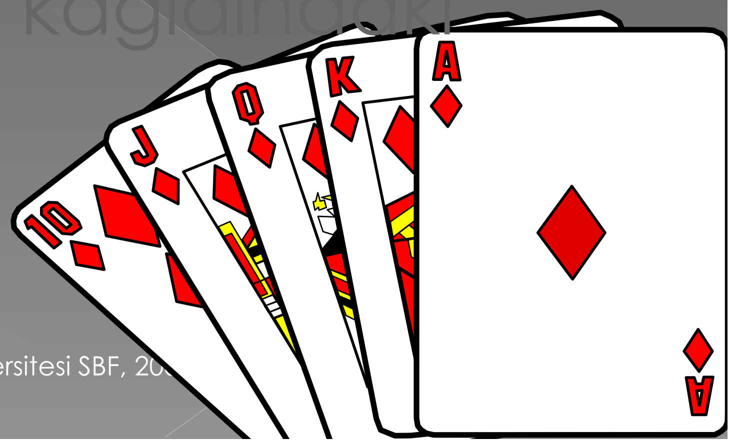
İstatistik 2
Bölüm 4

Genel Tekrar 4

Örnek Uzayı

- Rastgele bir denemede ortaya çıkması olası sonuçların tamamıdır
  - Örnek: bir zar bir kez yuvarlandığında
  - S= 
  - Yukarıdaki sonuçlardan biri elde edilecektir. Sonuçların her biri basit olaydır
  - Örnek: Bir deste iskambil kağıdındaki kartların tamamı



Olaylar

- **Basit Olay:**
  - rastsal bir denemede ortaya çıkması olası sonuçlardan her birine denir
  - Örnek: Bir deste iskambil kağıdından elde edilecek kırmızı bir kart
- **Birleşik Olaylar:** Ortak olaylarda denir
  - Birden fazla basit olaydan oluşur
  - Örnek: Bir deste iskambil kağıdından bir kart çekilmesi durumunda kartın as ve siyah olma olasılığı hesaplanabilir. Bu durumda iki basit sonuç vardır. Kartın as ve kırmızı olması

Olayların Tablo ve Ağaç Diyagramı ile Gösterimi

- Kontenjans Tabloları

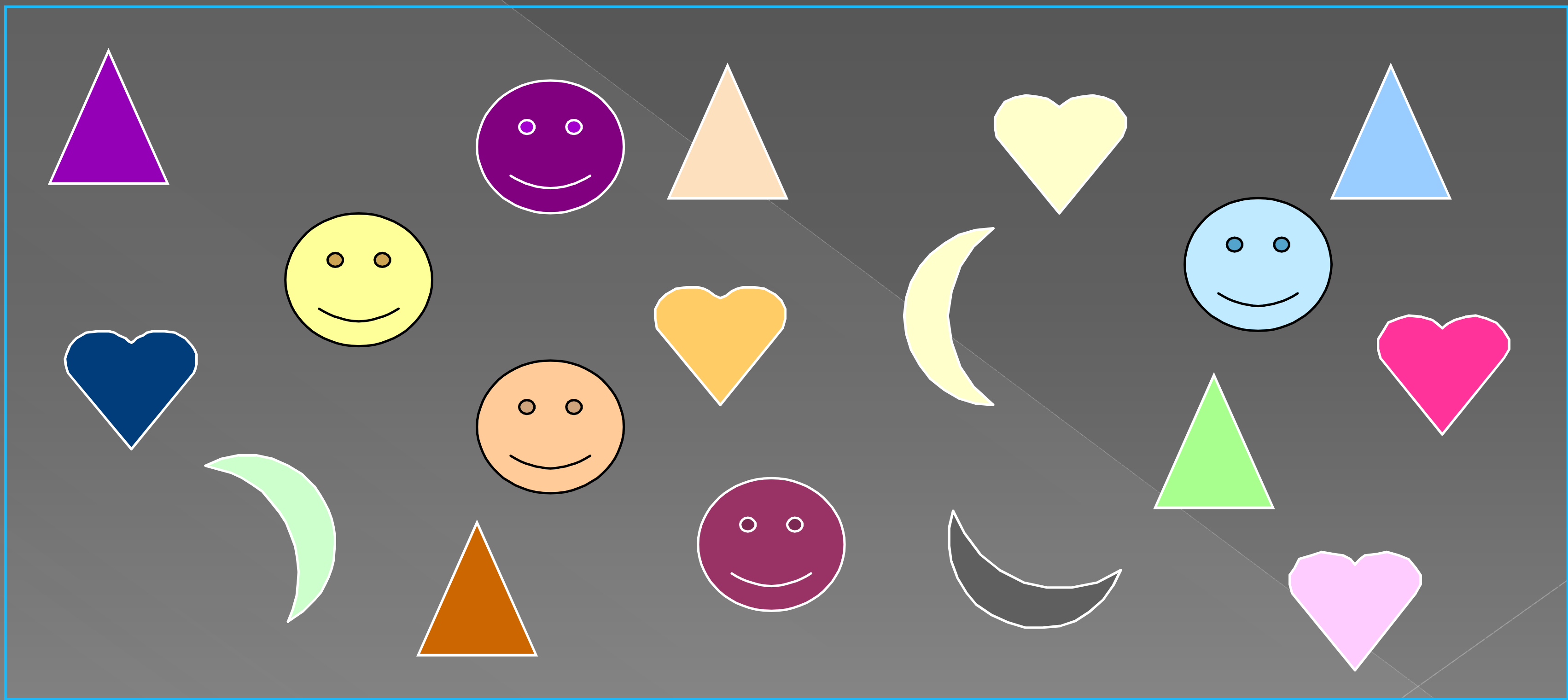
	As	As olmayan	Toplam
	2	24	26
Kırmızı	2	24	26
Toplam	4	48	52

- Ağaç Diyagramı

ersitesi SBF, 2007

Basit Olaylar

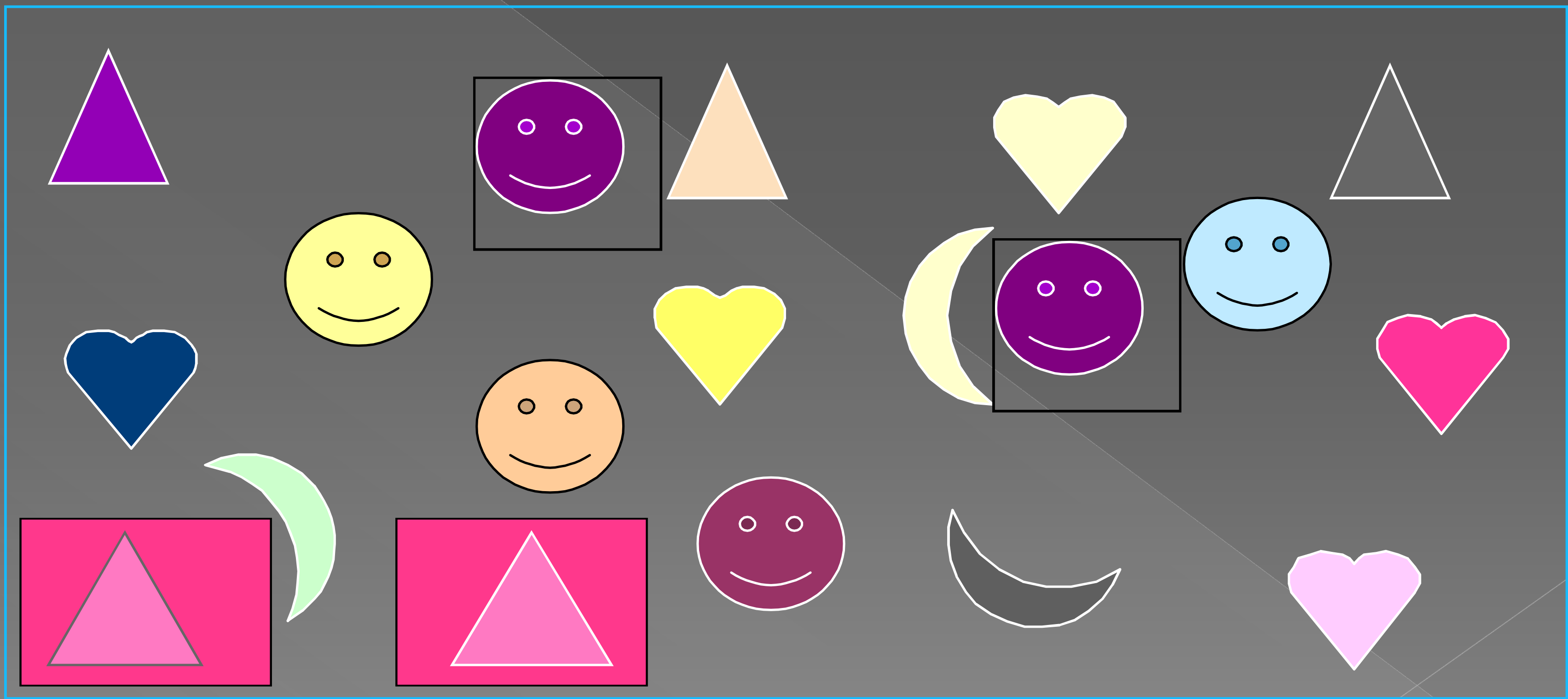
Üçgen olayı



Yukarıda 18 şekil içinde 5 üçgen bulunmaktadır

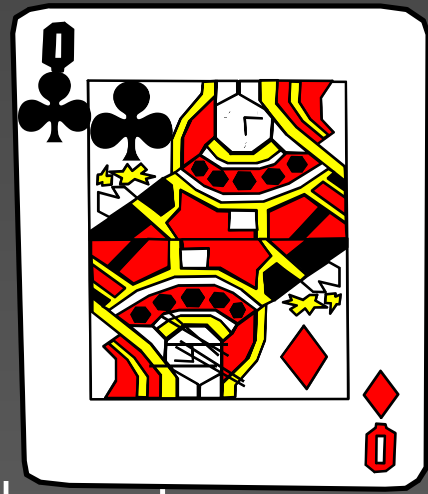
Birleşik Olasılıklar

Mavi renkte üçgen



2 adet mavi renkli üçgen var

Özel Olaylar



- İmkansız olaylar
  - Örnek: Bir kartta aynı anda sinek ve karo elde etme!
- Tamamlayıcı Olaylar
  - Örnek uzayında bulunan, A’da bulunmayan olaylar
  - **Ā** ile gösterilir
  - Örnek: A: siyah renkte as
    Ā : destede bulunan siyah renk as dışındaki kartlardan oluşan set

Özel Olaylar

- Tamamen Bağımsız Olaylar
  - İki olay hiçbir zaman birlikte gerçekleşmez
  - Örnek: -- A: siyah as; B: kırmızı as
    - A ve B tamamen bağımsızdır
- Bağımlı Olaylar
  - Olaylardan biri gerçekleşmek zorunda
  - Olaylar seti bütün örneği kapsamalı
  - Örnek: -- A: bütün aslar; B: bütün siyah kartlar; C: bütün kupalar; D: bütün baklavalar
    - Olay A, B, C ve D bağımlı
    - Olay B, C ve D de bağımlı

Kontenjans Tabloları

52 adet oyun kartı

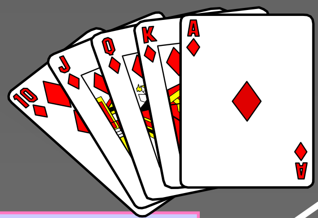
Kırmızı as

	As	As değil	Toplaml
Kırmızı	2	24	26
Siyah	2	24	26
Toplam	4	48	52

Örnek uzayı

Ağaç Diyagramı

Olası Olaylar

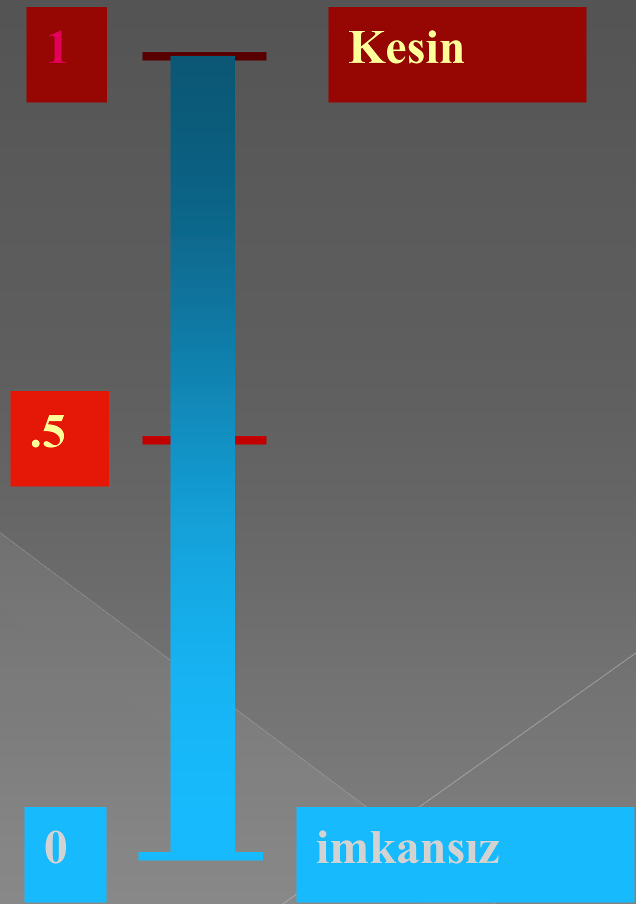


52 adet oyun kartı

- **Kırmızı**
  - As
  - As değil
- **Siyah**
  - As
  - As değil

Olasılık

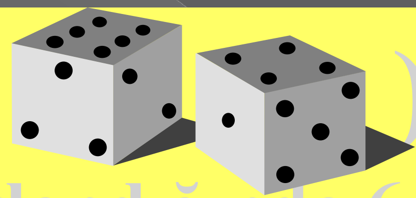
- Herhangi bir denemede bir olayın ortaya çıkma şansına denir
- Olayın ortaya çıkma şansı 0-1 arasındadır
- Bir denemede ortaya çıkması olası olayların ayrı ayrı olasılıklarının toplamı 1'e eşittir.



Olasılıkların Hesaplanması

- A olayının oluşma olasılığı:

- $$P(A) = \frac{n_A}{N}$$ Formülü ile hesaplanır

örnek P( **) = 2/36**

Bir çift zar yuvarlandığında 6 ve 4 elde etme olasılığı 2/36 dır

- Örnek uzayında yer alan her bir olayın oluşma olasılığı eşittir.

$$P(A \cap B)$$

- *a.* **Bağımlı Olaylar**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

b. Bağımsız Olaylar

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A ve B'nin Olasılığı: Kontenjans Tablosu ile

Olay	Olay		
	B_1	B_2	Toplam
A_1	P(A_1 ve B_1)	P(A_1 ve B_2)	P(A_1)
A_2	P(A_2 ve B_1)	P(A_2 ve B_2)	P(A_2)
Toplam	P(B_1)	P(B_2)	1

Ayrık Olaylar

Basit Marjinal Olasılıklar

Birleşik Olasılıkların Hesaplanması

- A ve B'nin birleşik olasılığı: Bağımsız Olaylar

P(AUB) = P(A) + P(B) dir.

Bağımlı olaylar (ekleme kuralı)

P (AUB) = P (A)+P(B) – P (A∩B)

Birleşik Olasılıkların Hesaplanması

$P(A_1 \text{ veya } B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \text{ ve } B_1)$

Olay	Olay		Toplam
	B_1	B_2	
A_1	$P(A_1 \text{ ve } B_1)$	$P(A_1 \text{ ve } B_2)$	$P(A_1)$
A_2	$P(A_2 \text{ ve } B_1)$	$P(A_2 \text{ ve } B_2)$	$P(A_2)$
Toplam	$P(B_1)$	$P(B_2)$	1

Bağımsız olaylar için ekleme kuralı:

P(A veya B) = P(A) + P(B)

Örnek

Çok iyi karılmış bir deste iskambil kağıdından rastsal olarak bir kart çekilmiş olsun çekilen bu kartın as veya kırmızı renkte olma olasılığı nedir?

Çözüm: Olay A: Kırmızı kart ve olay B: as kart olsun.

52 kart içerisinde 4 adet as, 26 adet kırmızı ve 2 adet kırmızı renkte as kart bulunmaktadır. Bu iki olay birbirine bağlıdır. Bu nedenle

P(A veya B) = P(A) + P(B) - P(A ve B)

formül kullanarak bir deste iskambil kağıdından tek çekişte kırmızı renkte bir kart veya as elde etme olasılığı hesaplanabilir.

$P(A) = 26/52 = 1/2$

$P(B) = 4/52 = 0.077$

$P(A \cap B) = 2/52 = 0.038 \Rightarrow P(A \cup B) = 0.52$

Örnek

- Kartın kırmızı ve as olma olasılığı nedir?

- A ve B olaylarının toplamı/olası toplam olay= 2/52

Koşullu Olasılıkların Hesaplanması

- A'nın oluşmuş olması koşulu ile B'nin olasılığı:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Kartın as olması koşulu ile kırmızı olasılığı nedir?

2 adet kırmızı as kart/toplam 4 adet as kart

Koşullu Olasılıklar İçin Kontenjas Tablosu

Türü	Renk		Toplam
	Kırmızı	Siyah	
As	2	2	4
Diğer	24	24	48
Toplam	26	26	52

$$P(\text{Kır} \mid \text{As}) = \frac{P(\text{As ve Kır})}{P(\text{As})} = \frac{2}{4}$$

[redacted]

Koşullu Olasılıklar İçin Kontenjas Tablosu

Türü	Renk		Toplam
	Kırmızı	Siyah	
As	2	2	4
Diğer	24	24	48
Toplam	26	26	52

$$P(\text{As} \mid \text{Kır}) = \frac{P(\text{As ve Kır})}{P(\text{Kır})} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{2}{26}$$

Koşullu Olasılıklar ve İstatistiksel Bağımsızlık

- Koşullu Olasılık:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ ve } B)}{P(B)}$$

- Çarpım Kuralı:

$$P(A \text{ ve } B) = P(A \mid B)\ P(B)$$
$$= P(B \mid A)\ P(A)$$

Koşullu Olasılıklar ve İstatistiksel Bağımsızlık

- Aşağıdaki koşulardan birinin sağlanması durumunda A ve B olayları istatistiksel olarak bağımsızdır

$$P(A \mid B) = P(A)$$

veya $$P(B \mid A) = P(B)$$

veya $$P(A \text{ ve } B) = P(A)P(B)$$

- A ve B olayları, A'nın ortaya çıkma olasılığı B'nin B'nin ortaya çıkma olasılığı da A'nın ortaya çıkma olasılığını etkilemiyorsa bağımsızdırlar

Olasılık Aksiyomları

- Örnek uzayının, $S = \{E_1, E_2, E_3, ...E_n\}$ şeklinde olduğu kabul edilirse,
- E'lerin gerçekleşme olasılıkları ile ilgili 2 zorunluluk vardır.
- 1. $0 \leq P(E_i) \leq 1$
- Sonuç: Örnek uzayında bulunan herhangi bir basit olayın (E) gerçekleşme olasılığı 0 ile 1 arasında bir değer olacaktır.

Olasılık Aksiyomları

- 2. $$\sum_{i=1}^{n} P(Ei) = 1$$

- Sonuç: Örnek uzayını oluşturan basit olayların her birinin ortaya çıkma olasılıklarının toplam 1'e eşit olacaktır.

Bayes Teoremi

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + \bullet\bullet\bullet + P(A \mid B_k)P(B_k)}$$

$$= \frac{P(B_i \text{ and } A)}{P(A)}$$

Aynı Olay

Bayes Teoremi

$$P(A\,|\,\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P(A)\ P(B\,|\,A)}}{\mathrm{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}}$$

Bayes Teoremi

Kredi alanlardan %50'si aldıkları krediyi zamanında geri ödemiştir. Kredi borcunu zamanında ödeyenlerden %40'ı üniversite mezunudur. Kredi borcunu zamanında geri ödeyemeyenlerin ise %10'u üniversite mezunudur. rastsal olarak seçilen birinin üniversite mezunu olması koşulu ile borcunu ödemiş olma olasılığı nedir?

$$P(R)=.50 \quad P(C|R)=.4 \quad P(C|\bar{R})=.10$$

$$P(R|C)=?$$

R: Kredi Borcunun Geri Ödenmiş Olması ($\bar{R}$: Ödenmemiş olması)

C: Üniversite Mezunu

Bayes Teoremi

	R	$\bar{R}$	Toplam
C	.2	.05	.25
$\bar{C}$	.3	.45	.75
Toplam	.5	.5	1.0

$$P(R\mid C)=\frac{P(C\mid R)P(R)}{P(C\mid R)P(R)+P(C\mid \bar{R})P(\bar{R})}$$

$$=\frac{(.4)(.5)}{(.4)(.5)+(.1)(.5)}=\frac{.2}{.25}=.8$$

Rastsal Değişkenler

- Rastsal değişken bir denemenin sonucunu sayısal olarak tanımlayan değişkendir.
- Rastsal bir değişken alacağı değerlere bağlı olarak kesikli yada sürekli olabilir.
- Bir kesikli rastsal değişken sonlu yada sonsuz sayıda değerler dizinini olarak ifade edilebilir.
- Bir sürekli rastsal değişken belirli bir aralık veya aralıklarda sayısal değerler ile tanımlanabilir.

Örnek: AAA Beyaz Eşya Mağazası

- Kesikli rastsal değişken sonlu sayıda değerle ifade edilebilir: (x kesikli rastsal değişken olsun)

  x = Mağazada bir günde satılan bulaşık makineleri bu durumda x şu olası değerlerden oluşabilir: (0, 1, 2, 3, 4)

- Kesikli rastsal değişken sonsuz sayıda değeler dizininden oluşabilir:

  x = bir günde mağazaya gelen müşteri sayısı olsun

  bu durumda x değişkeninin alacağı olası değerler 0, 1, 2, . . . biçiminde olacaktır.

  gelen müşteri sayılarını sayabiliriz fakat sonlu bir limit bulunmamaktadır.

Rastsal Değişkenler

Soru	Rastsal değişken x	Tür
Aile Büyüklüğü	x = ailedeki 18 yaş altındaki çocuk sayısı	Kesikli
Ev ile iş yeri Arasındaki mesafe	x = ev işyeri arası mesafe	Sürekli
Kedi veya köpeğiniz var mı?	x = 1 yok; = 2 sadece köpek; = 3 sadece kedi; = 4 her ikiside	Kesikli

Kesikli Olasılık Dağılımları

- Rastsal değişkenler için olasılık dağılımları olasılıkların rastsal değişkenler arasında nasıl dağıldığını tanımlar.
- Olasılık dağılımı olasılık fonksiyonu ile tanımlanır. Olasılık fonksiyonu $f(x)$ ile gösterilmektedir.
- Kesikli olasılık dağılım fonksiyonu ile ilgili 2 koşul vardır:

$$f(x) \geq 0$$

$$\Sigma f(x) = 1$$

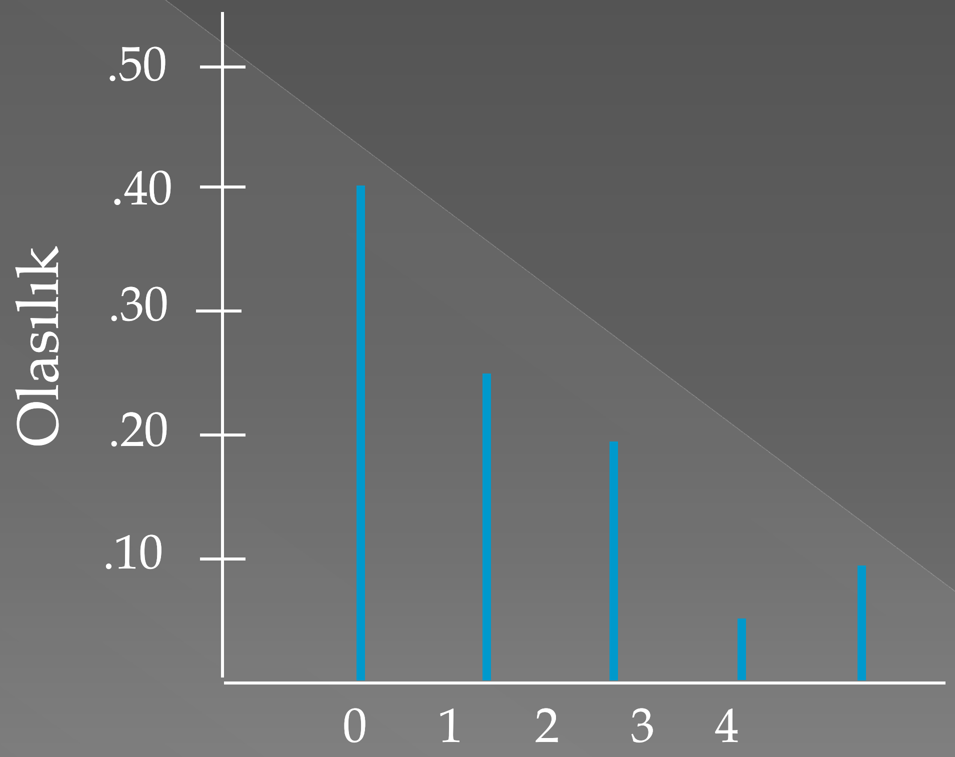
- Kesikli olasılık dağılım fonksiyonu tablo, grafik veya denklemle gösterilebilir.

Örnek (tablo)

- Geçmiş döneme ait data seti kullanılarak olasılık dağılımı tablo biçiminde gösterilmiştir:

satılan TV Sayısı	gün	x	f(x)
0	80	0	.40
1	50	1	.25
2	40	2	.20
3	10	3	.05
4	20	4	.10
	200		1.00

Örnek (tablo)



Rastsal değişkenin aldığı değerler x (TV satışları)

Kesikli Olasılık Dağılımı: Örnek

Olay: 2 demir paranın havaya atılması

Yazı sayısını hesaplayın

Olasılık Dağılımı

değer	Olasılık
0	1/4 = .25
1	2/4 = .50
2	1/4 = .25

Kesikli Olasılık Dağılımı

- Olası çiftleri listele [X_j , $p(X_j)$]
  - X_j = rastsal değişkenin alması olası değer
  - $P(X_j)$ = değerin oluşma olasılığı
- Tamamen bağımsız olaylar
- Her bir değerin ayrı ayrı oluşma olasılıklarının toplamı 1'e eşittir

$$0 \leq P\left(X_j\right) \leq 1 \qquad \sum P\left(X_j\right) = 1$$

Ortalama ve Varyans

- Beklenen değer
  - Olasılık dağılımının ağırlıklı ortalamasıdır
  - $$\mu = E(X) = \sum_j X_j P(X_j)$$
  - Örnek: 2 demir parayı havaya atın ve tura sayısını hesaplayın daha sonra beklenen değeri hesaplayın

$$\mu = \sum_j X_j P(X_j)$$

$$= (0)(2.5) + (1)(.5) + (2)(.25) = 1$$

Ortalama ve Varyans

- Varyans
  - Ortalamadan sapmaların karelerinin ağırlıklı ortalamasıdır
  - $$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum (X_j-\mu)^2 P(X_j)$$
  - Örnek: Demir parayı 2 kez havaya atın tura sayısını ve varyansı hesaplayın

$$\sigma^2 = \sum (X_j-\mu)^2 P(X_j)$$

$$= (0-1)^2(.25) + (1-1)^2(.5) + (2-1)^2(.25) = .5$$

Kovaryans ve Kullanımı

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{N} \left[X_i - E(X)\right]\left[Y_i - E(Y)\right] P(X_i Y_i)$$

X : Kesikli rastsal değişken

X_i : Kesikli rastsal değişkenin alacağı i inci değ

Y : Kesikli rastsal değişken

Y_i : Kesikli rastsal değişkenin alacağı i inci değe

$P(X_i Y_i)$ X ve Y'nin i inci değerlerinin gerçekleş
olasılığı

Örnek

İki yatırımın her $1000 için getirileri

		Yatırım	
$P(X_iY_i)$	**Ekonominin durumu**	**Dow Jones fund X**	**Growth Stock Y**
.2	Durgunluk	-$100	-$200
.5	İstikrarlı	+ 100	+ 50
.3	Büyüyen	+ 250	+ 350

$$E(X) = \mu_X = (-100)(.2) + (100)(.5) + (250)(.3) = \$105$$

$$E(Y) = \mu_Y = (-200)(.2) + (50)(.5) + (350)(.3) = \$90$$

Örnek

$P(X_i Y_i)$	Ekonominin durumu	Yatırım: Dow Jones fund X	Yatırım: Growth Stock Y
.2	Durgunluk	-$100	-$200
.5	İstikrarlı	+ 100	+ 50
.3	Büyüyen	+ 250	+ 350

$$\sigma_X^2 = (-100-105)^2(.2)+(100-105)^2(.5)+(250-105)^2(.3)$$
$$=14,725 \qquad \sigma_X = 121.35$$

$$\sigma_Y^2 = (-200-90)^2(.2)+(50-90)^2(.5)+(350-90)^2(.3)$$
$$=37,900 \qquad \sigma_Y = 194.68$$

Örnek

P(X_iY_i)	Ekonominin durumu	Yatırım Dow Jones fund X	Growth Stock Y
.2	Durgunluk	-$100	-$200
.5	İstikrarlı	+ 100	+ 50
.3	Büyüyen	+ 250	+ 350

$$\sigma_{XY} = (-100-105)(-200-90)(.2) + (100-105)(50-90)(.5)$$
$$+(250-105)(350-90)(.3) = 23,300$$

Kovaryansın 23,300 olması iki yatırım arasında pozitif yönlü bir ilişki olduğunu göstermektedir. İki yatırım aynı yönde değişmektedir

Kesikli Olasılık Dağılımları

Kesikli Olasılık Dağılımları

Binom

Poisson

Hipergeometrik

Binom Olasılık Dağılımı

- ‘n’ sayıda benzer deneme
  - Örnek: demir paranın 15 kez havaya atılması, bir ampul fabrikasından rastsal olarak 10 ampul seçilmesi
- Her bir denemede iki bağımsız sonuç
  - Örnek: yazı, tura. Bozuk sağlam (ampul)
- Denemeler bağımsız
  - Bir denemenin sonucu diğer denemenin sonucunu etkilemez

Binom Olasılık Dağılımı

- Her bir deneme için sabit bir olasılık
  - Örnek: her bir denemede tura elde etme olasılığı sabittir (1/2)
- İki tip örnekleme
  - Sonsuz üyeden oluşan bir populasyondan yerine koymadan
  - Sonlu populasyondan yerine koyarak

Binom Olasılık Dağılımı

- n denemede x sayıda başarılı sonuç elde etme:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\,.\,.\,.\,(2)(1)$$

$$0! = 1$$

Binom Olasılık Dağılımı

- N denemede x sayıda başarılı sonuç elde etme olasılığı:

$$p^{x}(1-p)^{(n-x)}$$

Binom Olasılık Dağılım Fonksiyonu

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X}$$

$P(X)$: n ve p veri X sayıda başarılı sonuç olasılığ

X : Örnekteki başarılı sonuç sayısı

p : Her bir başarılı sonucun olasılığı

n : Gözlem sayısı

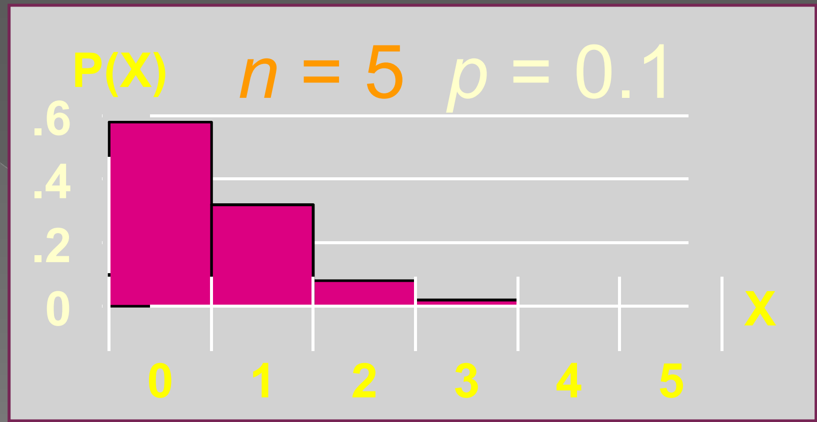
İki denemede yazı elde etme olasılı

X	P(X)
0	1/4 = .25
1	2/4 = .50
2	1/4 = .25

Binom Olasılık Dağılımının Özellikleri

- Ortalama
  - $\mu = E(X) = np$
  - $\mu = np = 5(.1) = .5$
- Varyans ve
- standart sapma
  - $\sigma^2 = np(1-p)$

    $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$



  - Örnek

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5(.1)(1-.1)} = .6708$$

Örnek

- Binom Olasılık fonksiyonunun kullanımı

p = .10, n = 3, x = 1 ise

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

$$f(1) = \frac{3!}{1!(3-1)!} (0.1)^1 (0.9)^2$$

$= (3)(0.1)(0.81)$

$= \quad .243$

Örnek

- Binom olasılık dağılım tablosunun kullanımı

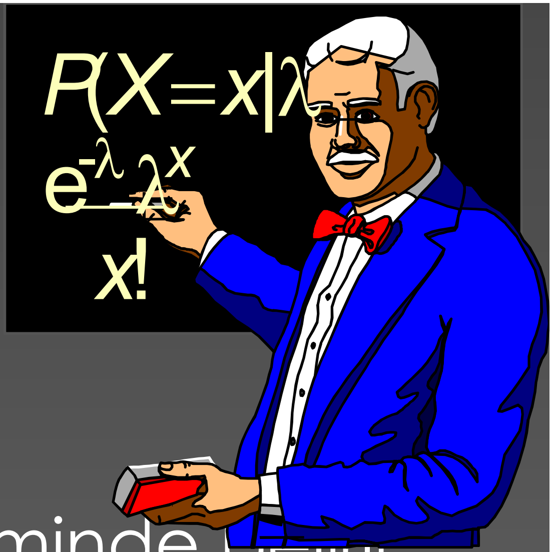
		p								
n	x	,10	,15	,20	,25	,30	,35	,40	,45	,50
3	0	,7290	,6141	,5120	,4219	,3430	,2746	,2160	,1664	,1250
	1	,2430	,3251	,3840	,4219	,4410	,4436	,4320	,4084	,3750
	2	,0270	,0574	,0960	,1406	,1890	,2389	,2880	,3341	,3750
	3	,0010	,0034	,0080	,0156	,0270	,0429	,0640	,0911	,1250

Binom Olasılık Dağılımı

- Örnek: excel uygulama

Microsoft Excel Worksheet

Poisson Olasılık Dağılımı



- Poisson Olasılık:
  - Kesikli olaylar; belli bir zaman diliminde belli bir olayın kaç kez yada ne miktarda ortaya çıktığı veya gözlemlendiği ile ilgilidir.
    - Belirli bir zaman diliminde başarılı sonuç elde etme olasılığı sabittir.
    - Bir zaman aralığında birden fazla başarı sonucu elde edilemez.
  - Başarı olaylarının gerçekleşme sayıları birbirinden bağımsızdır.
  - Beklenen değer büyüdükçe Poisson normal olasılık dağılımına yaklaşır

Poisson Olasılık Dağılımı

$$P(X)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

$P(X):$ λ veri iken n denemede X sayıda başarılı sonuç olasılığı

$X:$ başarılı sonuç olasılığı

$\lambda:$ Beklenen değer

$e:$ 2.71828 [redacted]

Örnek: Beklenen değerin 3.6 olması durumunda, bir süper markette 4 müşterinin herhangi bir kasaya 3 dakika içinde varma olasılığı nedir?

$$P(X)=\frac{e^{-3.6}3.6^{4}}{4!}=.1912$$

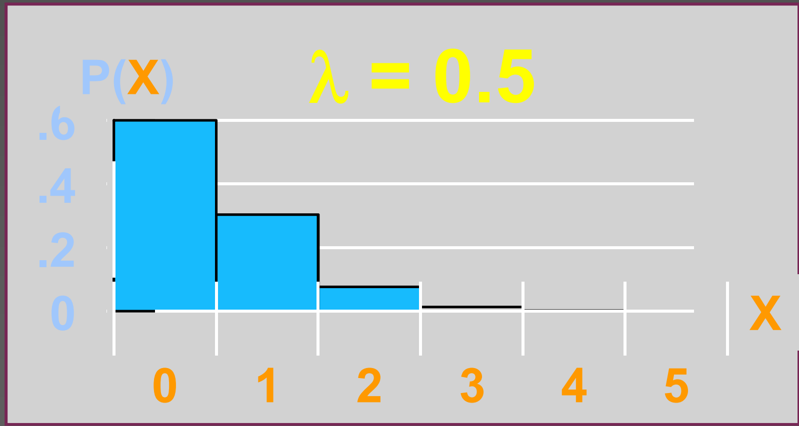
Poisson Olasılık Dağılımı

- Örnek: excel uygulama

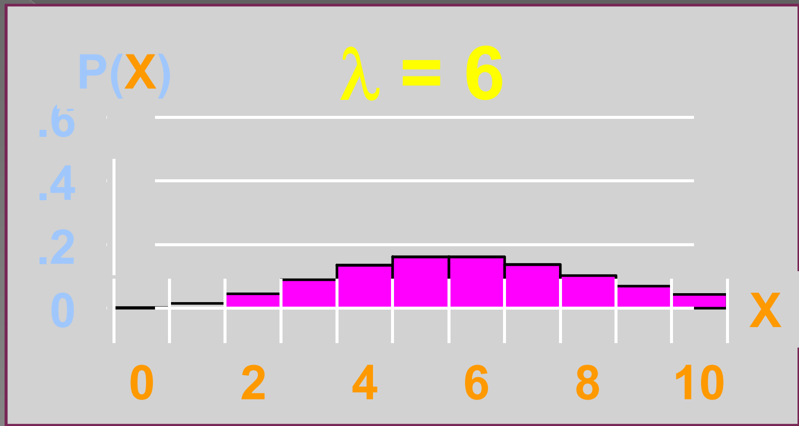
Microsoft Excel
Worksheet

Poisson Olasılık Dağılımı

- Ortalama
  - $$\mu = E(X) = \lambda$$
    $$= \sum_{i=1}^{N} X_i P(X_i)$$



- Varyans ve standart sapma
  - $$\sigma^2 = \lambda \qquad \sigma = \sqrt{\lambda}$$



Hipergeometrik Olasılık Dağılımı

Hipergeometrik Olasılık Dağılımı

$$P(X = x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Formülde,

P(X=x): A, n ve N'nin verilmiş olması durumunda x sayıda başarılı sonucun elde edilme olasılığı.

n: örnek sayısı.

N: populasyon sayısı.

A: Populasyondaki başarı sonucu sayısı.

x: Örnekteki başarı sonucu sayısı (X= 0, 1, 2, 3,...,n)

Hipergeometrik Olasılık Dağılımı

- Ortalama
  - $$\mu = E(X) = n\frac{A}{N}$$
- Varyans ve standart sapma
  - $$\sigma^2 = \frac{nA(N-A)}{N^2}\frac{N-n}{N-1}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{nA(N-A)}{N^2}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Sonlu populasyon düzeltme faktörü

Hipergeometrik Olasılık Dağılımı

Örnek: excel uygulama

Microsoft Excel
Worksheet