KONU 4: DUYARLILIK ANALİZİ – IV

Model Yapısındaki Değişim

4.1. Modele yeni bir değişken eklenmesi

$$\begin{aligned} \min/\max\ & f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (4.1)$$

biçiminde tanımlı standartlaştırılmış bir d.p.p.' de, *m* sayıda kısıt ve *n* tane değişken olsun. Problemin çözümü $\mathbf{X}_B^*$ olarak verilsin. (4.1) ifadesi ile tanımlı d.p.p.' ne bir değişken (X_{n+1}) daha eklensin. Bu durumda, a_{n+1} değişkenin katsayısı, c_{n+1} değişkenin fiyatı (amaç fonksiyonuna katkısı) olmak üzere, ***problemin primal uygunluğu etkilenir mi***?

X_{n+1} temel değişken olmadığı için, $X_{n+1} = 0$' dır. X_{n+1} temeli etkilemez ve $\mathbf{X}_B^*$ halen uygun çözümdür ($\mathbf{X}_B^* > 0$).

Problemin dual uygunluğu etkilenir mi?

X_{n+1} temel dışı değişken olduğu için en iyilik koşulları bozulabilir.

$$Z_{n+1} - c_{n+1} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{n+1} - c_{n+1}$$

eşitliği incelenerek, en iyilik koşullarının sağlanıp sağlanmadığına bakılabilir. Bir en büyükleme problemi için, $Z_{n+1} - c_{n+1} \geq 0$ ve bir en küçükleme problemi için, $Z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$ olmalıdır. Eğer, en iyilik koşulu sağlanıyorsa, yeni değişkenin (X_{n+1}) modele eklenmesi en iyi çözümü etkilemez. Aksi halde (en iyilik koşulunun bozulması durumunda), X_{n+1} değişkenine ilişkin $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{n+1}$ hesaplanır. Bu vektör, en iyi tabloya alınarak, en iyilik koşulu sağlanıncaya kadar simpleks yöntem uygulanır.

4.2. Modele yeni bir kısıt eklenmesi

m sayıda kısıta sahip, *n* değişkenli bir d.p.p.' ne yeni bir kısıt eklendiğinde kısıt sayısı *m*+1 olur. Probleme yeni bir kısıt eklendiğinde, $\mathbf{X}_B^*$ en iyi çözümünün verilen kısıtı sağlayıp sağlamadığına bakılır. Eğer sağlar ise, en iyi çözüm değişmez. Aksi halde, kısıt standartlaştırılarak, en iyi tabloya eklenir. "Gerekli işlemler" yapılarak, optimal çözüm elde edilir. (Genişletilmiş tabloda, Gauss eleme algoritması ile gerekli satır işlemleri yapılarak, temel çözüm bulunur. Bu işlemlerden sonra, primal uygunluk ya da dual uygunluk bozulmuş olabilir. Duruma göre, Dual Simpleks Algoritması veya Primal Simpleks Algoritması uygulanır.)

Örnek 4.1:

$$\begin{aligned}&\max\ Z = X_1 + 3X_2\\&2X_1 + 3X_2 \le 6\\&-X_1 + X_2 \le 1\\&\quad X_1, X_2 \ge 0\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal problemin en iyi çözüm tablosu

En iyi çözüm tablosu			1	3	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$
1	X_1	3/5	1	0	1/5	-3/5
3	X_2	8/5	0	1	1/5	2/5
		$Z^* = 27/5$	0	0	4/5	3/5

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre,

a. En iyi çözüm tablosu yukarıda verilen d.p.p.' ne, X_5 değişkeni ekleniyor. Eklenen bu değişkene ilişkin, $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ ve $c_5 = 3$ olarak veriliyor. X_5 değişkeninin eklenmesinin en iyi çözümde yaratacağı değişimi inceleyiniz.

b. D.p.p.' ne $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ve $c_5 = 5$ olan X_5 değişkeni eklenirse, en iyi çözüm değişir mi?

c. D.p.p.' ne $2X_1 + 5X_2 \ge 3$ kısıtı eklensin. En iyi çözüm değişir mi?

Çözüm:

a. $Z_5 - c_5 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 - c_5 \ge 0$ olmalı.

$$\begin{aligned}Z_5 - c_5 &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 - c_5\\&= \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5 & -3/5\\1/5 & 2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} - 3\\&= 16/5 - 3\\Z_5 - c_5 &= 1/5 > 0\end{aligned}$$

olduğundan, X_5 değişkeninin modele eklenmesi en iyi çözümü değiştirmez.

b.

$$\begin{aligned}Z_5 - c_5 &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 - c_5\\&= \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5 & -3/5\\1/5 & 2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - 5\end{aligned}$$

$$Z_5 - c_5 = \frac{11}{5} - 5$$
$$Z_5 - c_5 = -\frac{14}{5} < 0$$

olduğundan, X_5 değişkeninin modele eklenmesi en iyi çözümü değiştirir. Buna göre,

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5$$
$$= \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

olacak biçimde, $\mathbf{y}_5$ vektörü en iyi çözüm tablosuna alınarak, simpleks algoritması uygulanır.

			1	3	0	0	5	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
1	X_1	3/5	1	0	1/5	-3/5	-1/5	
3	X_2	8/5	0	1	1/5	2/5	4/5	
		$Z^* = 27/5$	0	0	4/5	3/5	-14/5	≥ 0 olmalı

			1	3	0	0	5	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
1	X_1	1	1	1/4	1/4	-1/2	0	
5	X_5	2	0	5/4	1/4	1/2	1	
		$Z^* = 11$	0	14/4	6/4	2	0	≥ 0 sağlandı

c.

$$\mathbf{X}_B^* = \begin{bmatrix} X_{B1}^* \\ X_{B2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} \text{ olup,}$$

$$2 \times \left(\frac{3}{5}\right) + 5 \times \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{46}{5} \geq 3$$

olduğundan, $2X_1 + 5X_2 \geq 3$ kısıtının eklenmesi, en iyi çözümü değiştirmez.

Örnek 4.2:

$$\begin{aligned} &\max\ Z = 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \\ &3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 20 \\ &2X_1 + X_2 + X_3 \leq 15 \\ &X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal problemin en iyi çözüm tablosu

En iyi çözüm tablosu			5	3	2	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$
5	X_1	5	1	1	0	1	-1
2	X_3	5	0	-1	1	-2	3
		$Z^* = 35$	0	0	0	1	1

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre, verilen d.p.p.' ne $X_1 + 2X_2 + 5X_3 \leq 10$ kısıtının eklenmesinin en iyi çözümü etkileyip etkilemediğini inceleyiniz.

Çözüm:

$$\mathbf{X}_B^* = \begin{bmatrix} X_{B1}^* \\ X_{B2}^* \\ X_{B3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ olup,}$$

$$5 + 2 \times 0 + 5 \times 5 > 10$$

olduğundan, $X_1 + 2X_2 + 5X_3 \leq 10$ kısıtının eklenmesi, en iyi çözümü değiştirir. Verilen kısıt,

$$X_1 + 2X_2 + 5X_3 + X_6 = 10$$

biçiminde standartlaştırılıp, en iyi çözüm tablosuna eklenir. Gauss yinelemeli işlemler uygulanarak, en iyi çözüm tablosuna eklenen satırda birim matris elemanları oluşturulacak biçimde güncelleme yapılır.

En iyi çözüm tablosu			5	3	2	0	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$
5	X_1	5	1	1	0	1	-1	0
2	X_3	5	0	-1	1	-2	3	0
0	X_6	10	1	2	5	0	0	1
		$Z^* = 35$	0	0	0	1	1	0

Yukarıdaki en iyi çözüm tablosunda 3. Satırda bulunan “1” ve “5” değerleri sıfır olacak biçimde

$-1\times(1.\ satır)+3.satır=Yeni\,3.satır$

ve

$-5\times(2.\ satır)+3.satır=Yeni\,3.satır$

işlemleri uygulanarak, hesaplamalar yapılır. Buradan,

En iyi çözüm tablosu			5	3	2	0	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$	
5	X_1	5	1	1	0	1	-1	0	
2	X_3	5	0	-1	1	-2	3	0	
0	X_6	-20	0	6	0	9	-14	1	
		$Z^*=35$	0	0	0	1	1	0	≥ 0 sağlandı

elde edilir. Bilinen dual simpleks algoritması adımları ile devam edildiğinde en iyi çözüm değeri

$$\mathbf{X}^*=\begin{bmatrix}X_1^*\\X_2^*\\X_3^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47/5\\5/7\\10/7\end{bmatrix}\text{ ve } Z^*=\frac{235}{7}$$

bulunur.