KONU 5: PARAMETRİK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Duyarlılık çözümlemesi ile bir d.p.p.' nin en iyi çözümünde parametrelere bağlı olarak ne gibi değişimler olabileceği belirlenmişti. Parametrik doğrusal programlama, duyarlılık çözümlemesinin daha geniş bir biçimde değerlendirilmesidir. Problemin parametrelerindeki sistematik değişimin etkisi parametrik çözümleme ile incelenir. Amaç, en iyi çözümde olabilecek değişmeler sonucu gereken işlemleri en aza indirmektir.

Durum 1: ($\mathbf{c}$ fiyat vektöründeki sistematik değişim)

c_j , $j=1,2,...,n$ katsayıları, amaç fonksiyonundaki değişkenlere ilişkin katsayı değerleridir. Bir d.p.p.' de amaç fonksiyonu,

$$\max/\min Z=\sum_{j=1}^{n} c_j X_j \tag{5.1}$$

biçiminde tanımlanır. θ, değişim parametresi ($\theta \geq 0$) ve α_j, göreli olarak bilinen bir sabit olmak üzere amaç fonksiyonu

$$Z(\theta)=\sum_{j=1}^{n}\left(c_j+\alpha_j\theta\right)X_j \tag{5.2}$$

olur. Burada, değişim belirli bir sayı yerine, c_j , $j=1,2,...,n$ parametrelerinde ortaya çıkabilecek değişim (artış/azalış), θ parametresi ile ifade ediliyor. Eşitlik (5.1)' de $\theta=0$ olması durumunda, Eşitlik (5.2)' nin elde edileceği açıktır. Burada amaç, θ parametresinin 0' dan başlayarak herhangi bir pozitif değere göre artması durumunda amaç fonksiyonu değişime uğramış parametrik d.p.p.' nin optimal çözüm değerinin ne olacağının belirlenmesidir.

- **$\mathbf{c}$ fiyat vektöründeki sistematik değişimin incelenmesi için algoritma:**

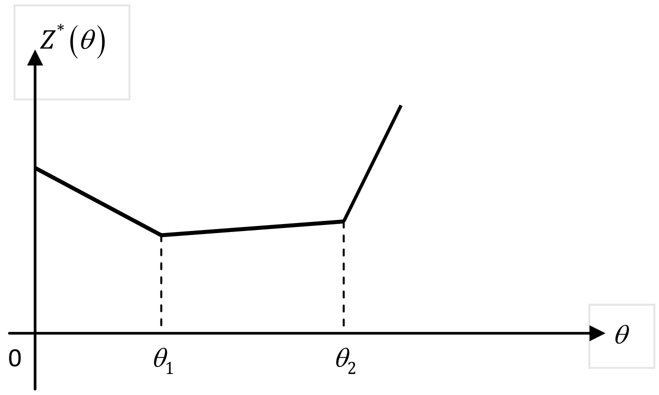
Adım 1: $\theta=0$ için, $Z(0)=\sum_{j=1}^{n} c_j X_j$ olacağından, simpleks algoritması ile en iyi çözüm tablosu bulunur.

Adım 2: θ parametresinin değişimleri incelenir.

Adım 3: θ' nın artan değerlerinin en iyilik koşulunu etkileyip, etkilemediğine bakılır. Eğer, en iyilik sağlanıyor ise, son bulunan çözüm en iyidir. Aksi halde, Adım 4' e gidilir.

Adım 4: Eğer, Adım 3' te en iyilik koşulu bozuluyor ise, simpleks algoritması uygulanır ve Adım 3' e dönülür.

En iyi çözüm, $Z^*(\theta)$ fonksiyonunun eğiminin değiştiği kırılma noktasındaki θ parametresinin değerlerine göre değişir. Dolayısı ile, θ' nın değişen değerleri için üç farklı en iyi çözüm vardır. θ' nın farklı değerleri için $Z^*(\theta)$ amaç fonksiyonu grafiği Şekil 5.1' de verilmiştir.



Şekil 5.1 θ' nın farklı değerleri için $Z^*(\theta)$ grafiği

Burada, θ_1 ve θ_2 kırılma noktalarıdır. Şekil 5.1' de gösterilen $0 \le \theta < \theta_1$, $\theta_1 \le \theta < \theta_2$ ve $\theta \ge \theta_2$ biçiminde tanımlı aralıklar için en çözüm değerlendirmesi ayrı ayrı incelenir. Dolayısı ile, θ' nın değişen değerleri için üç farklı en iyi çözüm vardır. Şekil 5.1' deki grafik doğrusal ve dışbükeydir.

Durum 2: (b ihtiyaçlar vektöründeki sistematik değişim)

b_i , $i = 1,2,...,m$ sağ yan değerleri, θ parametresine bağlı olarak,

$$\hat{b}_i = b_i + \alpha_i \theta \quad , \quad \alpha_i \text{ sabit }, \quad i = 1,2,...,m \quad , \quad \theta \ge 0 \tag{5.3}$$

biçiminde tanımlanır. Model

$$\max/\min Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \{\le, =, \ge\} b_i + \alpha_i \theta \ , \ i = 1,2,...,m$$

$$X_j \ge 0 \ , \ j = 1,2,...,n$$

olur. Amaç, θ parametresinin bir fonksiyonu olan en iyi çözümü bulmaktır.

- **b ihtiyaçlar vektöründeki sistematik değişimin incelenmesi için algoritma:**

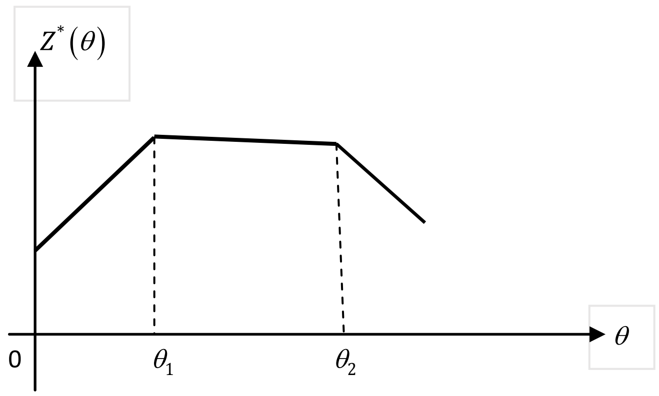
Adım 1: $\theta = 0$ için, verilen d.p.p.'i simpleks algoritması ile çözülür ve en iyi çözüm tablosu bulunur.

Adım 2: θ parametresinin değişimleri incelenir.

Adım 3: θ' nın artan değerleri için $\mathbf{X}_B^* = B^{-1}\mathbf{b}$ çözümünün uygun olup olmadığına bakılır. Eğer, uygun çözüm sağlanıyor ise, son bulunan çözüm en iyidir. Aksi halde, Adım 4' e gidilir.

Adım 4: Eğer, Adım 3' te uygun olmayan çözüme ulaşılıyor ise, dual simpleks algoritması uygulanır ve Adım 3' e dönülür.

En iyi çözüm, $Z^*(\theta)$ fonksiyonunun eğiminin değiştiği kırılma noktasındaki θ parametresinin değerlerine göre değişir. Dolayısı ile, θ' nın değişen değerleri için üç farklı en iyi çözüm vardır. θ' nın farklı değerleri için $Z^*(\theta)$ amaç fonksiyonu grafiği Şekil 5.2' de verilmiştir.



Şekil 5.2 θ' nın farklı değerleri için $Z^*(\theta)$ grafiği

Burada, θ_1 ve θ_2 kırılma noktalarıdır. Şekil 5.2' de gösterilen $0 \le \theta < \theta_1$, $\theta_1 \le \theta < \theta_2$ ve $\theta \ge \theta_2$ biçiminde tanımlı aralıklar için en çözüm değerlendirmesi ayrı ayrı incelenir. Dolayısı ile, θ' nın değişen değerleri için üç farklı en iyi çözüm vardır. Şekil 5.2' deki garafik doğrusal ve içbükeydir.

Örnek 5.1:

$$\max\ Z=(3+2\theta)X_1+(5-\theta)X_2$$
$$2X_1+3X_2\le 6$$
$$2X_1+X_2\le 4$$
$$X_1,X_2\ge 0$$

biçiminde tanımlı primal problemin, amaç fonksiyonu katsayılarında tanımlı parametrelerine göre duyarlılığını inceleyiniz.

Çözüm:

- $\theta=0$ için, verilen problemin en iyi çözümü elde edilir.

Başlangıç tablosu			3	5	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$
0	X_3	6	2	3	1	0
0	X_4	4	2	1	0	1
		$Z^*=0$	-3	-5	0	0

En iyi çözüm tablosu			3	5	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_2	2	2/3	1	1/3	0	
0	X_4	2	4/3	0	-1/3	1	
		$Z^*=10$	1/3	0	5/3	0	≥ 0 sağlandı

- θ parametresinin değişimleri incelenir.

			$3+2\theta$	$5-\theta$	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$
$5-\theta$	X_2	2	2/3	1	1/3	0
0	X_4	2	4/3	0	-1/3	1
		$Z^*=10-2\theta$	$\frac{1-8\theta}{3}$	0	$\frac{5-\theta}{3}$	0

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1-8\theta}{3}\geq 0 \;\Rightarrow\; \theta\leq\dfrac{1}{8}\\[2ex] \dfrac{5-\theta}{3}\geq 0 \;\Rightarrow\; \theta\leq\dfrac{5}{3}\end{array}\right\}\quad 0\leq\theta<\frac{1}{8}$$

- θ parametresinin artan değeri için değişim incelenir. $\theta=\frac{2}{8}>\frac{1}{8}$ olsun.

$$\frac{1-8(2/8)}{3}=-\frac{1}{3}<0$$
$$\frac{5-(2/8)}{3}=\frac{19}{12}>0$$

olup, buna göre koşulu bozan X_1 değişkeni temele alınır. Simpleks algoritması uygulanır.

			$3+2\theta$	$5-\theta$	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$
$5-\theta$	X_2	1	0	1	1/2	-1/2
$3+2\theta$	X_1	3/2	1	0	-1/4	3/4
		$Z^*=\frac{19}{2}+2\theta$	0	0	$\frac{7-4\theta}{4}$	$\frac{8\theta-1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{7-4\theta}{4}\geq 0 \;\Rightarrow\; \theta\leq\dfrac{7}{4}\\[2ex] \dfrac{8\theta-1}{4}\geq 0 \;\Rightarrow\; \theta\geq\dfrac{1}{8}\end{array}\right\}\quad \frac{1}{8}\leq\theta<\frac{7}{4}$$

- θ parametresinin artan değeri için değişim incelenir. $\theta=\frac{8}{4}>\frac{7}{4}$ olsun.

$$\frac{7-4(7/4)}{4}=-\frac{1}{4}<0$$
$$\frac{8(7/4)-1}{4}=\frac{15}{4}>0$$

olup, buna göre koşulu bozan X_3 değişkeni temele alınır. Simpleks algoritması uygulanır.

			$3+2\theta$	$5-\theta$	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$
0	X_3	2	0	2	1	-1
$3+2\theta$	X_1	2	1	1/2	0	1/2
		$Z^* = 6+4\theta$	0	$\frac{4\theta-7}{2}$	0	$\frac{3+2\theta}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4\theta-7}{2} \geq 0 \Rightarrow \theta \geq \frac{7}{4} \\ \frac{3+2\theta}{2} \geq 0 \Rightarrow \theta \geq -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \theta \geq \frac{7}{4}$$

- θ parametresinin artan değeri için değişim incelenir. $\theta = 2 > \frac{7}{4}$ olsun.

$$\frac{4\times 2-7}{2} = \frac{1}{2} > 0$$
$$\frac{3+2\times 2}{2} = \frac{7}{2} > 0$$

olup, θ' nın artan değerleri için en iyilik ölçütü sağlanmıştır.

θ parametresine göre duyarlılık analizi sonuçları Tablo 5.1' de özetlenmiştir.

Tablo 5.1 θ parametresindeki değişimlere göre duyarlılık analizi sonuçları

θ	$Z(\theta)$	$\mathbf{X}^* = [X_1^* \ \ X_2^*]$	$Z^*(\theta)$
$0 \leq \theta < 1/8$	$10-2\theta$	$[0 \ \ 2]$	[10, 9.75)
$1/8 \leq \theta < 7/4$	$\frac{19}{2}+2\theta$	$[3/2 \ \ 1]$	[9.75, 13)
$\theta \geq 7/4$	$6+4\theta$	$[2 \ \ 0]$	[13, ∞)

Örnek 5.2:

$$\begin{array}{l} \max\ Z = 2X_1 + 3X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 3+\theta \\ -X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 2-\theta \\ \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array}$$

biçiminde tanımlı primal problemin, sağ yan değerlerinde tanımlı parametrelerine göre duyarlılığını inceleyiniz.

Çözüm:

- $\theta = 0$ için, verilen problemin en iyi çözüm tablosu elde edilir. Buna göre en iyi çözüm tablosu

En iyi çözüm tablosu			2	3	-1	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
3	X_2	1	2/3	1	-1/3	1/3	0	
0	X_5	3	-1/3	0	5/3	1/3	1	
		$Z^* = 3$	0	0	0	1	0	≥ 0 sağlandı

biçiminde elde edilir.

- θ parametresinin değişimleri incelenir.
-

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+\theta \\ 2-\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+\theta)/3 \\ (9-2\theta)/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

olmalı. Buna göre,

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{3+\theta}{3} \geq 0 \;\Rightarrow\; \theta \geq -3 \\ \dfrac{9-2\theta}{3} \geq 0 \;\Rightarrow\; \theta \leq \dfrac{9}{2} \end{matrix}\right\} \; 0 \leq \theta < \frac{9}{2}$$

- θ parametresinin artan değeri için değişim incelenir. $\theta = \dfrac{10}{2} > \dfrac{9}{2}$ olsun.

$$\frac{3+5}{3} = \frac{8}{3} > 0$$
$$\frac{9-2\times 5}{3} = -\frac{1}{3} < 0$$

olup, buna göre koşulu bozan X_5 değişkeni temelden atılır. Dual simpleks algoritması uygulanır.

			2	3	-1	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
3	X_2	$\frac{3+\theta}{3}$	2/3	1	-1/3	1/3	0	
0	X_5	$\frac{9-2\theta}{3}$	-1/3	0	5/3	1/3	1	
		$Z^* = 3+\theta$	0	0	0	1	0	≥ 0

			2	3	-1	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
3	X_2	$7-\theta$	0	1	3	1	2	
2	X_1	$2\theta-9$	1	0	-5	-1	-3	
		$Z^* = 3+\theta$	0	0	0	1	0	≥ 0

$$\left.\begin{array}{l} 7-\theta \geq 0 \;\Rightarrow\; \theta \leq 7 \\ 2\theta - 9 \geq 0 \;\Rightarrow\; \theta \geq \frac{9}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{9}{2} \leq \theta < 7$$

$$7-8 = -1 < 0$$
$$2\times 8 - 9 = 9 > 0$$

Yukarıda yapılan hesaplamalara göre, X_2 değişkeni temelden çıkar. Fakat, temele alınacak değişken belirlenemediği için, problemin uygun çözümü bulunamaz.