KONU 6: DOĞRUSAL OLMAYAN OPTİMİZASYON

Bir matematiksel programlama probleminde, amaç fonksiyonu ile kısıtların bazıları ya da tümü doğrusal olmayan ifadeler ise, probleme, doğrusal olmayan programlama problemi (d.o.p.p.) denir. En iyi çözümü elde edilmek istenilen bir d.o.p.p.

$$\begin{aligned} &\max / \min \ Z = f(\mathbf{X}) \\ &g_i(\mathbf{X}) \le 0 \ , \ i = 1,2,...,t \\ &h_j(\mathbf{X}) = 0 \ , \ j = 1,2,...,m \end{aligned} \tag{6.1}$$

biçiminde tanımlanabilir. Karar değişkenleri vektörü, $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 ... \ X_n]'$ olmak üzere, $g_i(\mathbf{X}) \le 0$, $i = 1,2,...,t$ kısıt sistemi ele alınsın. $g_i(\mathbf{X}) = 0$ denklemini sağlayan $\mathbf{X}'$ lerin kümesi, tasarım uzayında bir çok boyutlu yüzey oluşturur. Bu kısıt yüzey, tasarım uzayını, $g_i(\mathbf{X}) < 0$ ve $g_i(\mathbf{X}) > 0$ olmak üzere ikiye böler. $g_i(\mathbf{X}) < 0$ olan bölgedeki noktalar, "uygun/kabul edilebilir" olup, $g_i(\mathbf{X}) > 0$ olan bölgedeki noktalar "uygun olmayandır" yorumu yapılır. $h_j(\mathbf{X}) = 0$, $j = 1,2,...,m$ kısıt yüzeyleri topluluğuna bileşik kısıt yüzeyi denir.

Sınır noktası: Bir ya da daha fazla kısıt yüzeyinde bulunan tasarım noktasıdır.
Serbest nokta: Herhangi bir kısıt yüzeyinde yer almayan noktadır.

Bir d.o.p.p. de üçten çok karar değişkeni varsa, grafiksel çözüm yaklaşımı kullanılarak, probleme çözüm bulunamaz. Problem ancak matematiksel olarak çözülebilir. D.o.p.p. nin tümünü çözebilen genel bir çözüm yöntemi yoktur. Bu amaçla farklı yöntemler geliştirilmiştir.

NOT: Bir $f(\mathbf{X})$ fonksiyonunun minimum noktası $\mathbf{X}^*$ ise, aynı nokta fonksiyonun negatifi olan $-f(\mathbf{X})$ in de maksimum noktasıdır.

Doğrusal Olmayan Programlama Problemleri

Örnek 1: Bir üretici üç tip ürün üretiyor. Bu ürünlerin aylık satış hacmi ve birim satış fiyatları sırasıyla X_j ve f_j, j=1,2,3 ile gösterilsin. Birinci ve ikinci ürünün satış hacmi kendi fiyatlarına, üçüncü ürünün satış hacmi ise diğer ürünlerin satış hacmine bağlıdır. Daha önceki bilgilere göre, X_j ve f_j arasında aşağıdaki bağıntıların olacağı tahmin ediliyor:

$$X_1 = 10 - f_1$$

$$X_2 = 16 - f_2$$

$$X_3 = 6 - \frac{1}{2} f_3 + \frac{1}{4} f_2$$

Bu üç ürünün birim maliyetleri sırasıyla 6, 7 ve 10 birimdir. Üretim, iş gücü ve makine zamanları ile sınırlıdır. Her ay 1000 makine saatine ve 2000 iş gücü saatine sahiptir. Birinci ürünün her birimi 0.4 makine saati ve 0.2 iş gücü saati, ikinci ürünün her birimi 0.2 makine saati ve 0.4 iş gücü saati, üçüncü ürünün her birimi ise 0.1 makine saati ve 0.1 iş gücü saati kullanıyor. Aylık kazancı maksimum yapacak olan satış miktarını bulmayı amaçlayan problemin matematiksel modelini oluşturunuz.

Çözüm:

Karar değişkenleri: $X_j : j.$ üründen satılacak miktar , j=1,2,3

Amaç fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \left(f_1 X_1 - 6X_1\right) + \left(f_2 X_2 - 7X_2\right) + \left(f_3 X_3 - 10X_3\right) \\ &= \left(\left(10 - X_1\right)X_1 - 6X_1\right) + \left(\left(16 - X_2\right)X_2 - 7X_2\right) + \left(\left(20 - \frac{X_2}{2} - 2X_3\right)X_3 - 10X_3\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, d.o.p.p.

$$\begin{aligned} \max\ Z = 4X_1 - X_1^2 + 9X_2 - X_2^2 + 10X_3 - 2X_3^2 - \frac{1}{2} X_2 X_3 \\ 0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.1X_3 \le 1000 \\ 0.2X_1 + 0.4X_2 + 0.1X_3 \le 2000 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 2: Kenar uzunlukları *a*, *b*, *c* olan üçgen biçimindeki bir arazinin çevresinin yarısı *s*′ dir. Bu arazinin çevresine 600 m uzunlukta dikenli tel çekilmek isteniyor. Dikenli tel ile çevrilen üçgen biçimindeki alanı maksimum yapacak biçimde problemi d.o.p.p. biçiminde modelleyiniz.

Çözüm:

NOT:

Üç Kenar Uzunluğu Verilen Üçgenin Alanı

ABC üçgenin çevresi

$Ç(\widehat{ABC}) = a + b + c$ olmak üzere,

$$u = \frac{a+b+c}{2} = \frac{Ç(\widehat{ABC})}{2}$$

$$\boxed{A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki bilgiden yararlanarak, verilen problemin matematiksel modeli

$$\begin{aligned}
\max\ Z &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
a+b+c &= 600 \\
a &\leq b+c \\
b &\leq a+c \\
c &\leq a+b \\
a,b,c &\geq 0
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 3: Bir maden işletmesinin B1, B2, B3 ve B4 bölgelerinde birer maden ocağı bulunmaktadır. Bu dört bölgeden çıkarılan madenleri depolamak için büyük bir depo yapılması isteniyor. B2 ocağı, B1 ocağının 150 km doğusunda ve 260 km kuzeyindedir. B3 ocağı, B2 ocağının 150 km doğusunda ve 140 km güneyindedir. B4 ocağı, B3 ocağının 50 km doğusunda ve B1 ocağının 160 km kuzeyindedir. Depo ile maden ocakları arasındaki bağlantıyı sağlayacak yolların uzunluğu minimum olacak biçimde, depo için en uygun yeri belirlemek amacıyla oluşturulabilecek amaç fonksiyonu ne olur?

Çözüm: (Kısıtsı d.o.p.p.)

$$\begin{aligned}
\min f(\mathbf{X}) = &\sqrt{X_1^2 + X_2^2} + \sqrt{(X_1-150)^2 + (X_2-260)^2} + \sqrt{(X_1-300)^2 + (X_2-120)^2} \\
&+ \sqrt{(X_1-350)^2 + (X_2-160)^2}
\end{aligned}$$