KONU 7: KLASİK OPTİMİZASYON - I

Matematiksel Gösterimler

Tanım 1: (Öklid Uzayı)

Üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanmış sonlu boyutlu vektör uzayıdır.

Tanım 2: (Norm)

E^n Öklid uzayı verilsin. Burada, $\mathbf{x} = \left[x_1\, x_2 \ldots x_n\right]'$ ve $\mathbf{y} = \left[y_1\, y_2 \ldots y_n\right]'$ vektörleri tanımlansın. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki uzaklık

$$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right\| = \sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2 + \left(x_2-y_2\right)^2 + \ldots + \left(x_n-y_n\right)^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$\mathbf{y}=\mathbf{0}$ olması durumunda, $\mathbf{x}$' in normu $\left\|\mathbf{x}\right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ olur.

Tanım 3: (İç Çarpım)

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E^n$ olmak üzere, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki iç çarpım

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Eğer, iç çarpım sıfır ise ($\mathbf{x}'\mathbf{y}=0$), $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri birbirine diktir.

NOT: (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği) $\left|\mathbf{x}'\mathbf{y}\right| \le \left\|\mathbf{x}\right\| \left\|\mathbf{y}\right\|$

Tanım 4: (Doğru)

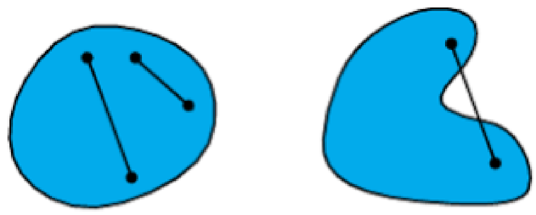
E^n Öklid uzayında, $S \neq \varnothing$ kümesi tanımlansın. x_1, $x_2 \in E^n$ olsun. Bu iki farklı noktadan geçen doğru,

$$S = \left\{x : x = \lambda x_2 + \left(1-\lambda\right)x_1 \text{ , } -\infty < x < \infty\right\}$$

biçiminde verilen S noktalar kümesi olarak tanımlanır ya da S noktalar kümesine, x_1 ve x_2 den geçen doğru denir. Burada, λ skalerdir. $0<\lambda<1$ için, S, x_1 ve x_2' yi birleştiren doğru parçası adını alır.

Tanım 5: (Dışbükey Küme)

x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası da S kümesinin bir öğesi ise, S kümesine dışbükey (konveks) küme denir.



Dışbükey küme Dışbükey olmayan küme

Tanım 6: (Dışbükey Bileşim)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ aynı kümenin farklı noktaları iken $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olmak üzere,

$$x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

biçiminde elde edilen x_0 ’ a, verilen noktaların dışbükey bileşimi denir.

$(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ biçimindeki noktalar, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olacak biçimde, x_1 ve x_2 noktalarının dışbükey bileşimleridir. Burada, $\lambda_1 = (1-\lambda)$ ve $\lambda_2 = \lambda$ dır.

Tanım 7: (Çok Boyutlu Düzlem)

E^n ’ de çok boyutlu düzlem,

$S = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}'\mathbf{x} = z\}$

noktalar kümesi olarak tanımlanır. Burada, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ve z sabittir.

Örneğin, $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\} \in E^3$ dır.

Tanım 8: (Kapalı Yarım Uzay ve Açık Yarım Uzay)

Çok boyutlu düzlem E^n ’ yi

$S = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}'\mathbf{x} \geq z\}$ ve $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}'\mathbf{x} \leq z\}$ biçiminde iki kapalı yarım uzaya ayırır. Kesin eşitsizlik durumunda, S ’ ye açık yarım uzay denir.

Tanım 9: (Uç Nokta)

S, E^n uzayında tanımlı bir dışbükey küme olsun. x_1, $x_2 \in S$, $\lambda \in [0,1]$ ve $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $x = x_1 = x_2$ ise, $x \in S$, S' nin bir uç noktası adını alır.

$\{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ biçimindeki çok boyutlu küme, sonlu sayıda uç noktaya sahiptir.

Teorem: $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ boş olmayan bir küme olsun. Burada, $\mathbf{A}$, rankı m olan $m \times n$ boyutlu matris ve $\mathbf{b}$, m boyutlu vektördür. Bu özelliğe sahip S kümesinin en az bir uç noktası vardır.

Özellik 1: Bir kümenin farklı iki noktasının dışbükey bileşimi olarak yazılamayan noktası var ise, bu noktaya uç nokta (köşe nokta) denir.

Özellik 2: Eğer, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x}$ fonksiyonunun en iyi çözümü var ise, bu nokta uygun çözüm alanının bir uç noktasıdır. Amaç fonksiyonu en iyi değerini birden fazla uç noktada alıyorsa, bu noktaların her dışbükey bileşimi de en iyi çözümdür.

Tanım 10: (Dışbükey Fonksiyon)

S, E^n' de tanımlı boş olmayan bir küme olsun. $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, S' de dışbükey bir fonksiyon ise,

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, x_1, $x_2 \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ dir.

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, kesin dışbükey bir fonksiyon ise,

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) < \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1)$$

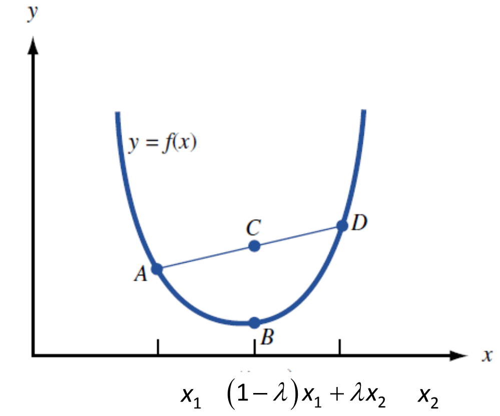
biçiminde tanımlanır.

Buna göre, $-f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, içbükey (konkav) fonksiyon olacaktır.

Dışbükey fonksiyonların toplamı dışbükey bir fonksiyon, içbükey fonksiyonların toplamı da içbükey bir fonksiyon olur.

Doğrusal olmayan programlamada, ele alınan bir fonksiyonun dışbükey veya içbükey olduğunun belirlenebilmesi oldukça önemlidir.

Bir dışbükey fonksiyonun grafiksel gösterimi, Şekil 7.1' de verilmiştir.



Şekil 7.1. Dışbükey bir fonksiyonun grafiksel gösterimi

Burada,

$$A=(x_1,f(x_1))$$

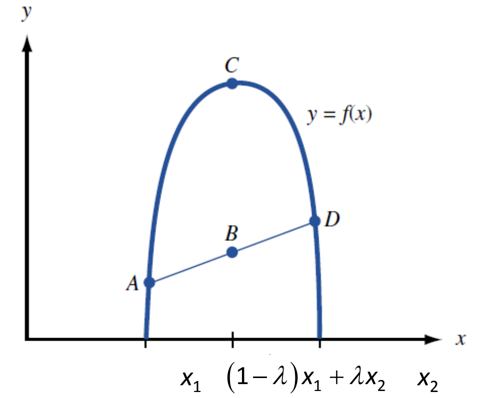
$$D=(x_2,f(x_2))$$

$$B=(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1,f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1))$$

$$C=(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1,\ \lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1))$$

olarak tanımlıdır.

Bir içbükey fonksiyonun grafiksel gösterimi ise, Şekil 7.2' deki gibi olacaktır.



Şekil 7.2. İçbükey bir fonksiyonun grafiksel gösterimi

Burada,

$$A=(x_1,f(x_1))$$

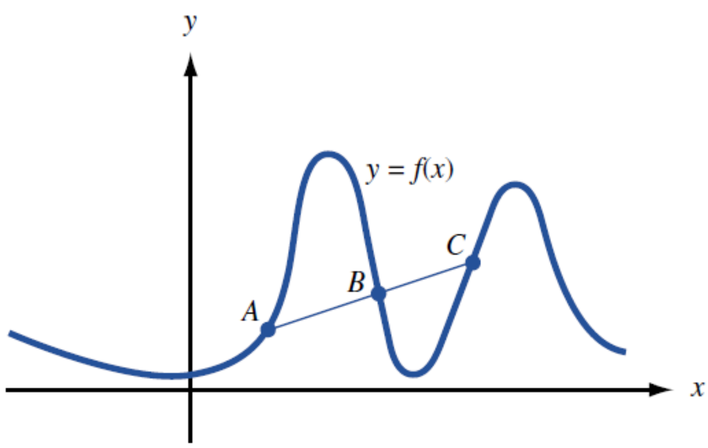
$$D=(x_2,f(x_2))$$

$$C=(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1,f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1))$$

$$B=(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1,\ \lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1))$$

olarak tanımlıdır.

Şekil 7.3' te, ne konveks ne de konkav bir fonksiyonun grafiği görülmektedir.



Şekil 7.3. Ne dışbükey ne de içbükey bir fonksiyonun grafiksel gösterimi

Örnek 7.1: *n* boyutlu uzayda, çok boyutlu düzlemin bir dışbükey küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$S=\{(x_1, x_2, \dots ,x_n): d_1x_1+d_2x_2+\dots+d_nx_n=b\}\in E^n$ olmak üzere $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ noktalarının dışbükey bileşimi $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{x}_1$ dir.

$\mathbf{D}'=[d_1\ d_2 \dots d_n]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}'\mathbf{x} &= \mathbf{D}'\left(\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{x}_1\right)\\
&= \mathbf{D}'\lambda\mathbf{x}_2+\mathbf{D}'\mathbf{x}_1-\mathbf{D}'\lambda\mathbf{x}_1\\
&= \lambda\mathbf{D}'\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{D}'\mathbf{x}_1\\
&= b(\lambda+1-\lambda)\\
\mathbf{D}'\mathbf{x} &= b
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 7.2: Bir yarım uzayın üst tarafında bulunan noktaların oluşturduğu kümenin dışbükey küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\mathbf{x}_1$ yarım uzay üzerinde ise, $\mathbf{D}'\mathbf{x}_1=b$

$\mathbf{x}_2$ yarım uzayın üst bölgesinde ise, $\mathbf{D}'\mathbf{x}_2>b$

yazılabilir. Bu iki noktanın, ($\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$) dışbükey bileşimi

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}'\mathbf{x} &= \mathbf{D}'\left(\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{x}_1\right) \quad , \quad 0<\lambda<1\\
&= \lambda\underbrace{\mathbf{D}'\mathbf{x}_2}_{>b}+(1-\lambda)\underbrace{\mathbf{D}'\mathbf{x}_1}_{=b}
\end{aligned}$$

olacağından, $\mathbf{D}'\mathbf{x}>b$ dir.

Örnek 7.3: Bir doğrusal programlama probleminin (d.p.p.), tüm uygun çözümlerinin oluşturduğu kümenin dışbükey küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathbf{x}$ noktası, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots ,\mathbf{x}_n$ noktalarının doğrusal bileşimi olarak,

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\dots+\lambda_n\mathbf{x}_n=\mathbf{x}$$

biçiminde yazılır. Burada, $\lambda_i\geq 0$, $i=1,2,\dots,n$ ve $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ dir. Bu tanımlardan,

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}\left(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n\right)\\ &= \lambda_1\underbrace{\mathbf{Ax}_1}_{=\boldsymbol{b}} + \lambda_2\underbrace{\mathbf{Ax}_2}_{=\boldsymbol{b}} + \ldots + \lambda_n\underbrace{\mathbf{Ax}_n}_{=\boldsymbol{b}}\end{aligned}$$

olup,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n\right)$$

bulunur. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ olduğundan, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dir.

Örnek 7.4: Dışbükey fonksiyonların toplamının da dışbükey fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $S \subset E^m$ bir dışbükey küme ve $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1,2,\ldots,m$ dışbükey fonksiyonlar olsun.

$G(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})$ olarak alınsın.

$$f_i\left(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\right) \le \lambda f_i(x_2) + (1-\lambda)f_i(x_1) \;\;,\;\; 0 \le \lambda \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\left(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\right) \le \lambda\sum_{i=1}^{m} f_i(x_2) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} f_i(x_1) \quad , \quad x_1, x_2 \in S$$

$$G\left(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\right) \le \lambda G(x_2) + (1-\lambda)G(x_1)$$

olup, *G* fonksiyonu dışbükeydir.

Örnek 7.5: $f(x) = x^2$, $x \in R$, fonksiyonunun dışbükey fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonu, $f\left(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\right) \le \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1)$, $0 \le \lambda \le 1$ biçiminde gösterilmeli.

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\right)^2 \le \lambda(x_2)^2 + (1-\lambda)(x_1)^2\\
&\lambda^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2 x_1^2 \le \lambda x_2^2 + (1-\lambda)x_1^2\\
&\lambda^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2 x_1^2 - \lambda x_2^2 - (1-\lambda)x_1^2 \le 0\\
&-\lambda(1-\lambda)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 - \lambda(1-\lambda)x_1^2 \le 0\\
&-\lambda(1-\lambda)\left(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2\right) \le 0\\
&-\underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{>0} \le 0
\end{aligned}$$

olduğundan, $f(x) = x^2$ fonksiyonu dışbükeydir.