KONU 8: KLASİK OPTİMİZASYON - II

Tek Değişkenli Dışbükey Fonksiyonlar ve Özellikleri

$f(x)$, verilen bir S dışbükey kümesinde tanımlı ve $\forall\, x \in S$ için ikinci türevi alınabilir bir fonksiyon olsun.

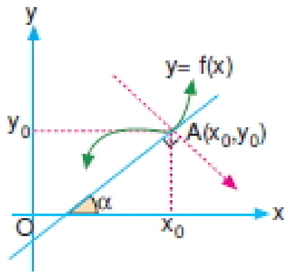
- $\forall\, x \in S$ için $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ dışbükey bir fonksiyon

  ($\forall\, x \in S$ için $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ kesin dışbükey bir fonksiyon)

- $\forall\, x \in S$ için $f''(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ içbükey bir fonksiyon

  ($\forall\, x \in S$ için $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ kesin içbükey bir fonksiyon)

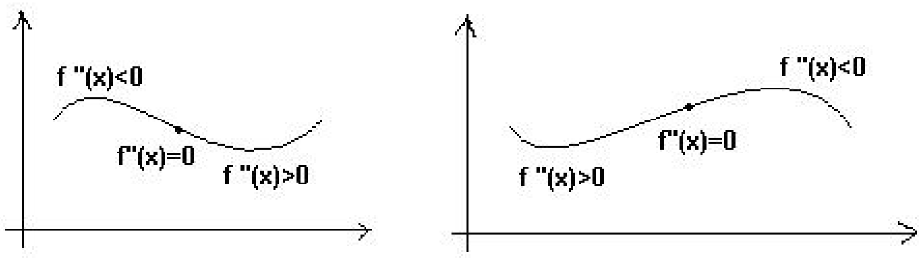
NOT 1: $y = f(x)$eğrisi üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin eğimi o noktadaki türevine eşittir.



$$m = \tan\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

NOT 2: $f'(x_0)$ varsa, $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ da sürekli fonksiyondur. Tersi doğru olmayabilir. $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ da sürekli olup, türevi olmayabilir. $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ da sürekli değilse, türevli de değildir.

NOT 3: $f(x)$ fonksiyonun ikinci türevinin geometrik anlamı Şekil 8.1' de gösterilmiştir.



Şekil 8.1 İkinci türevin geometrik anlamı

Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunda, değişkene göre birinci türev ($\frac{df(x)}{dx}$), $f(x)$ fonksiyonundaki değişim oranını (fonksiyonun eğimini) verirken, ikinci türev ($\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$), $f(x)$ fonksiyonunun değişim oranının değişim oranını (fonksiyonun eğimindeki değişim oranını) verir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun dışbükey ya da içbükey olup olmadığının belirlenmesinde, öncelikli olarak fonksiyonun birinci türevinin sıfıra eşit olduğu noktadaki uç değeri belirlemek gereklidir. Daha sonra, bu uç değerin fonksiyon için bir maksimum nokta ya da bir minimum nokta olup olmadığının belirlenmesi gerekir. Bu amaçla tanımlanan gerekli ve yeterli koşullara göre uç noktanın türüne karar verilir.

Gerekli Koşullar:

$\frac{df(x)}{dx} = 0$ olacak biçimde x^* uç değeri bulunur.

Yeterli Koşullar:

$\frac{d^2 f(x^*)}{dx^2} > 0$ ise, fonksiyonun değeri, x^* uç değerinde bir minimumdur.

$\frac{d^2 f(x^*)}{dx^2} < 0$ ise, fonksiyonun değeri, x^* uç değerinde bir maksimumdur.

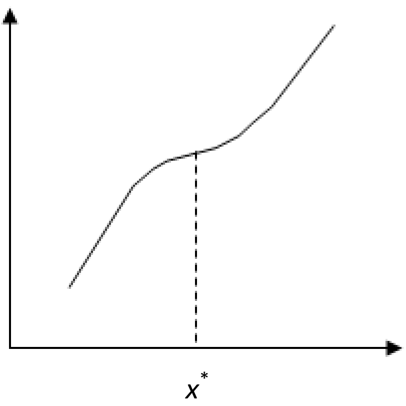
$\frac{d^2 f(x^*)}{dx^2} = 0$ ise, x^* ın bir uç nokta değeri olması için yüksek mertebeden türevler göz önüne alınmak zorundadır. Bu durumda aşağıdaki teoreme göre karar verilir.

Teorem: Bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $f(x)$, sabit bir x^* noktasında, $f^{(n-1)}(x^*) = 0$ ve $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonu x^* da

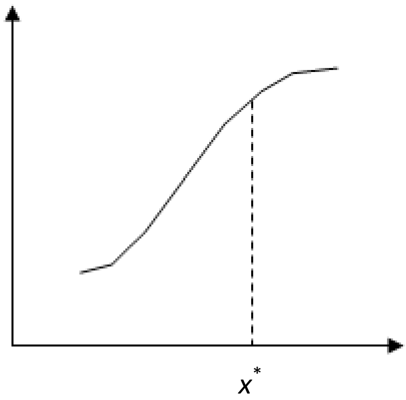
i. n tek sayı ise, bir büküm (dönüm, dönüşüm) noktasına sahiptir.

ii. n çift sayı ise, $f^{(n)}(x^*) > 0$ ise, minimum değere, $f^{(n)}(x^*) < 0$ ise, maksimum değere sahiptir.

NOT 4: Bir fonksiyonun artış hızının değiştiği (ikinci türevinin işaretinin değiştiği) noktaya **dönüm noktası** denir. Bu noktada ikinci türev sıfır değerini alır. Şekil 8.2 ve Şekil 8.3' te konkavlığın değiştiği noktalarda $f''\left(x^*\right)=0$ dır.

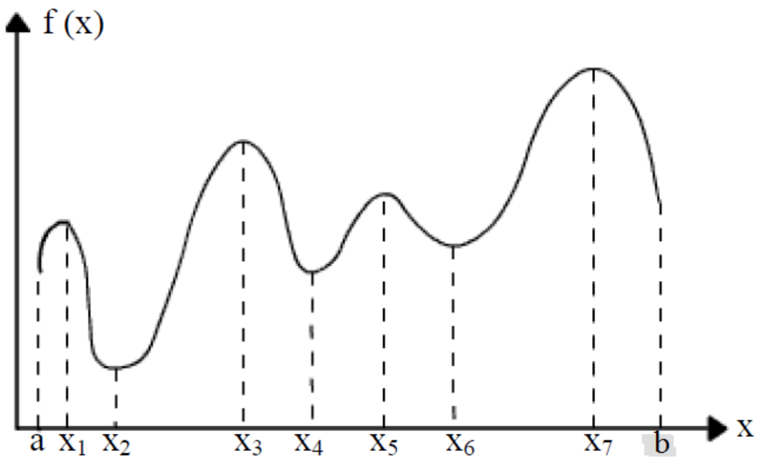


Şekil 8.2 $f(x)$ fonksiyonunun azalarak artan bir durumdan, artarak artan bir duruma geçişi



Şekil 8.3 $f(x)$ fonksiyonunun artarak artan bir durumdan, azalarak artan bir duruma geçişi

Şekil 8.4' te, $[a, b]$ aralığında, tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunun, minimum ve maksimum noktaları görülmektedir. Burada, x_1, x_3, x_5, x_7 yerel (lokal) maksimum noktalar olup, x_7 mutlak (global) maksimumdur. x_2, x_4, x_6 yerel (lokal) minimum noktalar olup, x_2 mutlak (global) minimumdur.



Şekil 8.4 $f(x)$ fonksiyonunun minimum ve maksimum noktaları

Örnek 8.1: $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$ fonksiyonunun tanımlılık durumunu inceleyerek, uç değerini/değerlerini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=3\left(x^2-1\right)^2 2x=0 \Rightarrow x_1^*=0\ ,\ x_2^*=1\ ,\ x_3^*=-1$$

$$\frac{d^2f\left(x^*\right)}{dx^2}=f''(x)=6\left(2\left(x^2-1\right)2x^2+\left(x^2-1\right)^2\right)=6\left(x^2-1\right)^2+24x^2\left(x^2-1\right)$$

$f''\left(x_1^*\right)=f''(0)=6>0$ olduğundan, $x_1^*=0$ minimum noktadır.

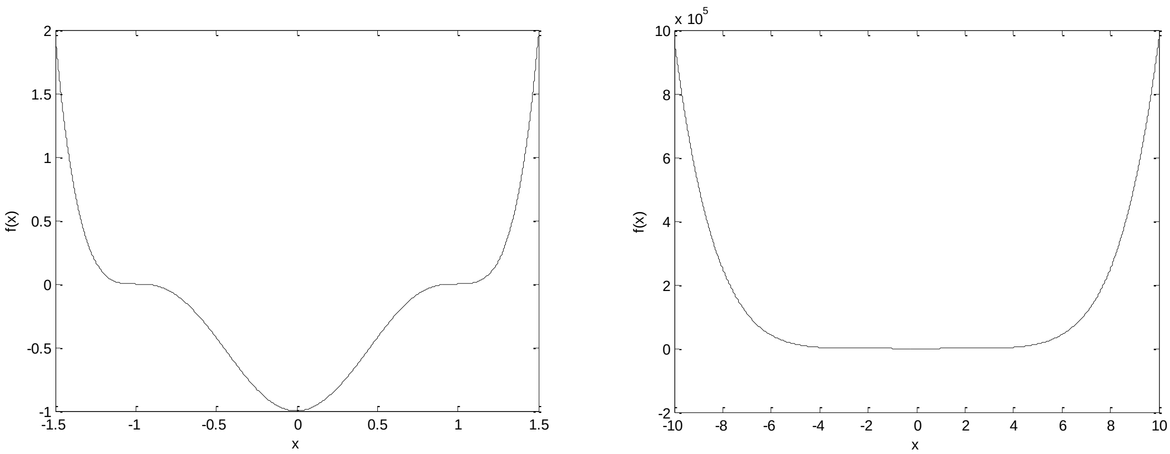
$f''\left(x_2^*\right)=f''(1)=0$ ve $f''\left(x_3^*\right)=f''(-1)=0$ olduğundan, yüksek mertebeden türevler incelenir.

$f'''(x)=24x\left(x^2-1\right)+24\left(2x\left(x^2-1\right)+2x^3\right)$ olmak üzere,

$f'''(1)=48\neq 0$

$f'''(-1)=-48\neq 0$

bulunur. Buna göre, n=3 tek sayı olduğundan verilen $f(x)$ fonksiyonu için $x_2^*=1$ ve $x_3^*=-1$ noktaları büküm (dönüm) noktalarıdır. Şekil 8.5' te fonksiyonun farklı tanım aralıkları için grafiği gösterilmektedir.



Şekil 8.5 $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$ fonksiyonu grafikleri

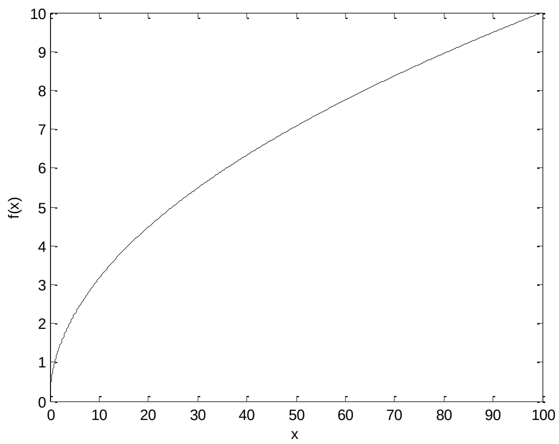
Örnek 8.2: $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $S=(0,\infty)$ kümesinde tanımlılık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

olup, $\forall\, x\in S$ için, $f''(x)<0$ olduğundan, verilen $f(x)$ fonksiyonu içbükey (konkav) bir fonksiyondur. Şekil 8.6' da $f(x)$ içbükey fonksiyonunun grafiği görülmektedir.



Şekil 8.6 $f(x)=\sqrt{x}$ içbükey fonksiyonunun grafiği