MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ)
Hafta 1: Reel Vektör Uzayları ve Vektör Uzayları

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof.Dr.Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 1: Belli bir yönlü doğru parçasının paralellik bağıntısı ile tanımlanan denklik sınıfına bir **vektör** denir.
A ve B gibi farklı iki noktayı birleştiren AB doğru parçası üzerinde bir yön seçilerek bir vektör elde edilir. Bu yön A dan B ye veya B den A ya olabilir. A dan B ye yönlendirilmiş doğru parçası AB şeklinde gösterilir. Bu durumda A ve B uç noktaları veya sırasıyla, **başlangıç ve uç noktası** denir. AB nin ters yönündeki yönlü doğru parçası BA ile gösterilir.
AB ve CD gibi iki yönlü doğru parçası verildiğinde şu üç aksiyom sağlanırsa bu iki yönlü doğru parçasına **paraleldir** denir:

1. AB ve CD doğruparçaları paraleldir.
2. AB ve CD doğru parçalarının boyları eşittir.
3. AB nin yönü ile CD nin yönü aynıdır.

Yönlü doğru parçaları arasında paralellik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının ayırdığı denklik sınıflarının her birine **vektör** denir. Başlangıç noktası A ve bitim noktası B olan vektör $\overrightarrow{AB}$ ile gösterilir.

Tanım 2: A keyfi bir nokta olmak üzere $\overrightarrow{AA}$ vektörü **sıfır vektörü** olarak tanımlanır ve $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ ilie gösterilir.
Tanım 3: Aşağıda verilen aksiyomlara afin aksiyomlar denir ve afin aksiyomlar yardımıyla Nokta ile vektör eşlenir.

1. A, B gibi iki nokta verildiğinde bir $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{AB}$ vektörü vardır.
2. Bir α vektörü ve bir A noktası verildiğinde $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{AB}$ olacak biçimde bir tek B noktası vardır.
3. A, B, C gibi herhangi üç nokta için $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Tanım 4: V bir vektör cümlesi olmak üzere

$$\oplus : V \times V \to V, \ \left(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\right) \to \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta}$$

işlemi olarak paralelkenar kuralı verilsin. $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ olmak üzere bir $\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} \in V$ vektörü ile $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ üzerine kurulabilecek olan paralelkenarın birinci köşegeninin temsil ettiği vektörü tanımlayalım. Buna göre

$$\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{BC}$$

alırsak;

$$\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

olur. Vektörlerde toplama geometrik olarak **Paralelkenar metodu** ya da **Uç uca ekleme metodu** ile yapılır.

Teorem 1: V vektör cümlesinde tanımlı toplama işleminin aşağıdaki cebirsel özelikleri vardır.

1. $\forall \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ için $\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} \in V$, (Kapalılık özeliği)
2. $\forall \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in V$ için $\left(\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta}\right) \oplus \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \left(\overrightarrow{\beta} \oplus \overrightarrow{\gamma}\right)$, (Birleşme özeliği)
3. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \oplus \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$ olacak şekilde $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in V$, (Etkisiz eleman özeliği)
4. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{\alpha} \oplus \left(-\overrightarrow{\alpha}\right) = \left(-\overrightarrow{\alpha}\right) \oplus \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ olacak şekilde $-\overrightarrow{\alpha} \in V$, (Ters eleman özeliği)
5. $\forall \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ için $\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta} \oplus \overrightarrow{\alpha}$, (Değişme özeliği)

Bu durumda $\{V, \oplus\}$ ikilisi bir **Abel Grup** olur.

Tanım 5:$(\mathbb{R}, +, .)$ reel sayılar cisminin elemanları skalarlar olmak üzere bir vektörün skalarla çarpımı işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \ \ (\lambda, \overrightarrow{\alpha}) \to \lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$$

biçiminde bir işlemdir, yani sonuç bir vektördür.

Teorem 2: V vektör cümlesinde tanımlı yukarıda verilen skalarla çarpma işleminin aşağıdaki cebirsel özelikleri vardır.

1. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha} \in V$, (Kapalılık özeliği)
2. $\forall \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için
$$\lambda \odot \left(\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta}\right) = \left(\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}\right) \oplus \left(\lambda \odot \overrightarrow{\beta}\right)$$
3. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için
$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \odot \overrightarrow{\alpha} &= \left(\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}\right) \oplus \left(\mu \odot \overrightarrow{\alpha}\right), \\ (\lambda . \mu) \odot \overrightarrow{\alpha} &= \lambda \odot \left(\mu \odot \overrightarrow{\alpha}\right) \end{aligned}$$
4. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ için $1 \odot \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{a}$

Vektörlerde Skalar ile çarpma işleminin Geometrik Yorumu:
Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ değerlerine göre $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörünün yönü ve uzunluğu değişir. Bu durumlar:
$\lambda \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ olmak üzere
i) $\lambda = 0$ için $0 \odot \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{0}$
ii) $0 \langle \lambda \langle 1$ için $\overrightarrow{\alpha}$ ile $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörlerinin doğrultuları ve yönleri aynı, sadece $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyu $\overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyuna göre daha kısadır.
iii) $\lambda \rangle 1$ için $\overrightarrow{\alpha}$ ile $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörlerinin doğrultuları ve yönleri aynı, sadece $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyu $\overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyuna göre daha uzundur.
iv) $\lambda = 1$ için $1 \odot \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{a}$ dır.

$\lambda \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere

i) $\lambda = -1$ için $\overrightarrow{\alpha}$ ile $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörlerinin doğrultuları aynı fakat yönleri ters, doğrultuları aynı ve $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyu ile $\overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyu aynıdır.

ii) $-1 \langle \lambda \langle 0$ için $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörlerinin doğrultuları aynı fakat yönleri ters, $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyu $\overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyuna göre daha kısadır.

iii) $\lambda \langle -1$ için $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörlerinin doğrultuları aynı fakat yönleri ters, $\lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyu $\overrightarrow{\alpha}$ vektörünün boyuna göre daha uzundur.

Tanım 6: Paralel kuralı ile iki vektörün farkını şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\overrightarrow{\alpha} \oplus \left(-\overrightarrow{\beta}\right) = \overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$$

$$(\overrightarrow{-\alpha}) \oplus \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha}$$

Örnek 1: $\overrightarrow{\alpha} = (2,-3,1) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\beta} = (4,2,-3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} 5.\overrightarrow{\alpha} &= 5.(2,-3,1) \\ &= (5.2, 5.(-3), 5.1) \\ &= (10,-15,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} &= (2,-3,1) + (4,2,-3) \\ &= (2+4, -3+2, 1+(-3)) \\ &= (6,-1,-2) \end{aligned}$$

Örnek 2: $\overrightarrow{\alpha} = (2-i, -3+i) \in \mathbb{C}^2$, $\overrightarrow{\beta} = (4-3i, 2+5i) \in \mathbb{C}^2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} 5.\overrightarrow{\alpha} &= 5.(2,-3,1) \\ &= (5.2, 5.(-3), 5.1) \\ &= (10,-15,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} &= (2,-3,1) + (4,2,-3) \\ &= (2+4, -3+2, 1+(-3)) \\ &= (6,-1,-2) \end{aligned}$$

Tanım 7 :
$\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ vektörleri eğer;

$$\overrightarrow{\alpha} = \lambda \overrightarrow{\beta}$$

ise $\left\{ \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \right\}$ vektör çiftine *lineer bağımlıdır* (paraleldir) denir.
$\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ vektörleri eğer;

$$\overrightarrow{\alpha} \neq \lambda \overrightarrow{b}$$

ise $\left\{ \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \right\}$ vektör çiftine *lineer bağımsızdır* (paralel değildir) denir.

Örnek 4: $\overrightarrow{\alpha} = (2, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\beta} = (4, -6, -2) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere;.

$$\overrightarrow{\beta} = \lambda \overrightarrow{\alpha}$$

olacak şekilde $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ vardır.
O halde $\overrightarrow{\alpha}$ ile $\overrightarrow{\beta}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek 3: Düzlemde herhangi iki farklı nokta A, B olduğuna göre bu noktalardan geçen doğru üzerinde bir P noktasının bulunması şartı nedir?
Çözüm: Paralelkenar kuralına göre

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

dir. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1-t) + t\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1 - t$ ve $\lambda_2 = t$ dersek $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ bulunur.

Genel olarak $\mathbb{E}^n$ de $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ gibi verilen iki noktadan geçen doğru için , doğru üzerinde değişken bir nokta P olmak üzere

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

veya $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

olduğundan

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}$$

dir. Bu ifadeye söz konusu **doğrunun vektörel denklemi** denir. Bileşenler cinsinden aynı denklemi yazalım.

Önce $\overrightarrow{AB}$ nin bileşenleri olarak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (b_1, b_2, ..., b_n) - (a_1, a_2, ..., a_n)\\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)\end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) &= (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \\
&\quad + \lambda\,(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots\ldots, b_n - a_n) \\
&= [a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \ldots, a_n + \lambda(b_n - a_n)]
\end{aligned}
$$

veya iki sıralı ikilinin eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\
x_2 &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\
&\vdots \\
x_n &= a_n + \lambda(b_n - a_n)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu son denklemlere de söz konusu **doğrunun parametrik denklemi** denir.

Yukarıdaki denklemden λ parametresi çekilirse

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = ... = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n} = \lambda$$

bulunur. Bu ifadeye söz konusu **doğrunun standart denklemi** denir.

Tanım 8: d, $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında bir doğru ve $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. A ile B bu doğru üzerinde iki farklı nokta olmak üzere $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right\}$ vektör çifti lineer bağımlı ise d **doğrusu** $\overrightarrow{u}$ **vektörüne paraleldir** denir. Ayrıca d doğrusuna paralel olan $\overrightarrow{u}$ vektörüne de d doğrusunun **doğrultman vektörü** denir.
Genel olarak bir doğru üzerinde değişken bir nokta P olmak üzere $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ noktasından geçen ve bir $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörüne paralel olan **doğrunun vektörel denklemi**

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{u}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

ve buradan hareketle

doğrunun parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda v_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda v_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + \lambda v_n \end{aligned}$$

veya bu son ifadeden λ çekilerek **doğrunun standart denklemi**

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{v_n}$$

bulunur.

Örnek 5: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında $\overrightarrow{u} = (2, -3, 1)$ vektörünü doğrultman kabul eden ve $A(4, -6, -2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.
Doğru üzerinde değişken bir nokta $P(x, y, z)$ olsun. O halde, sırasıyla,
doğrunun vektörel denklemi;

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{u}; \ \lambda \in \mathbb{R},$$

doğrunun parametrik denklemi;

$$\begin{aligned} P &= A + \lambda \overrightarrow{u}; \ \lambda \in \mathbb{R}, \\ (x, y, z) &= (4, -6, -2) + \lambda (2, -3, 1) \\ (x, y, z) &= (4 + 2\lambda, -6 - 3\lambda, -2 + \lambda) \end{aligned}$$

ve **standart denklemi**

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{1} = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

olur.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.