MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ) Hafta 2: Reel Vektör Uzayları ve Vektör Uzayları(Devam)

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI, Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Teorem 3: Düzlemde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ noktalarını köşe kabul eden üçgenin alanı

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right| \end{aligned}$$

dir. Buradan hareketle düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru denklemi $P(x, y)$ olmak üzere

$$\det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}) = 0$$

ya da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 0$$

biçimindedir.

Örnek 6: $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında $A(-1,2)$, $B(3,5)$ ve $C(0,3)$ noktalarını köşe kabul eden üçgenin alanını hesaplayınız.
Örnek 7: $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında $A(-1,2)$ ve $B(3,5)$ noktalarından geçen doğru denklemini yazınız.
Örnek 8: $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ olan doğru denklemini yazınız. Eğim ile doğrultman arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

Tanım 9: $(\mathbb{H},+,.)$ bir cisim ve V boştan farklı bir cümle olmak üzere bir

$$\oplus : V \times V \to V, \ \left(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\right) \to \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta}$$

iç işlemine göre V cümlesi bir Abel grup) ve

$$\odot : \mathbb{H} \times V \to V, \ \left(\lambda, \overrightarrow{\alpha}\right) \to \lambda \odot \overrightarrow{\alpha}$$

skalarla çarpma işlemi(dış işlemi) de Teorem 2 de ifade edilen özellikleri sağlıyor ise V cümlesi $(\mathbb{H},+,.)$ cismi üzerinde 21 Aksiyomlu bir cebirsel yapı oluşturulur. Bu cebirsel yapıya $\mathbb{H}$ cismi üzerinde bir **vektör uzayı ve** bu uzayın elemanlarına da **vektör** adı verilir. Bu cebirsel yapı kısaca

$$\{V, \oplus, (\mathbb{H},+,.), \odot\}$$

ile gösterilir. $\mathbb{H} = \mathbb{R}$ ise V vektör uzayına reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı, $\mathbb{H} = \mathbb{C}$ ise V vektör uzayına kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzayı denir.

Örnek 9: A herhangi bir cümle olmak üzere.

$$\mathbb{R}^A = \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}$$

cümlesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzayın elemanlarına da **vektör** diyeceğiz. Görüldüğü gibi bu elemanlar fonksiyonlardır.
Burada $A = \mathbb{R}$ olması özelhalinde reel eksen üzerindeki reel değerli fonksiyonlardan meydana gelen bir reel vektör uzayı elde ederiz.

Tanım 10:
$\mathbb{R}^n$ cümlesinin bir elemanı $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere, sıralı reel sayı n-lisi diye adlandıracağımız $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dir.

$$\mathbb{R}^n = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

cümlesi üzerinde toplama işlemi $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, sırası ile,

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \to \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

ve skalar ile çarpma işlemi

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda, \overrightarrow{x}) \qquad \lambda \cdot \overrightarrow{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

şeklinde tanımlanır. Bu iki işleme göre $\{\mathbb{R}^n, +, (\mathbb{R}, +, .), \cdot\}$ bir reel vektör uzayı olur.

$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ elemanını

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &= (x_1, x_2, ..., x_n) \\
&= (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., x_n) \\
&= x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, 0, ..., 1)
\end{aligned}$$

olarak ifade edebiliriz.
Sadece i-yinci bileşeni 1 ve diğer bileşenleri 0 olan bir vektöre $\overrightarrow{e_i}$ dersek

$$
\begin{aligned}
i &= 1 \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, \ldots.., 0) \\
i &= 2 \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \ldots.., 0) \\
&\vdots \\
i &= n \Rightarrow \overrightarrow{e_n} = (0, 0, \ldots...., 1)
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörünü

$$
\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots.. + x_n \overrightarrow{e_n}
$$

biçiminde yazabiliriz.

Demek oluyor ki $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı kendisine ait olan özel n tane vektör olan

$$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$$

vektörleri ile belirtilebilir.
$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörü bir O noktasına göre bir P noktasına karşılık gelir ve $\overrightarrow{x}$ ile P noktası birebir eşlenebilir. Yani;

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP}$$

dir.

$\overrightarrow{x}$ vektörüne karşılık gelen noktalar O ve P dir.O halde $\overrightarrow{x}$ nün ait olduğu vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ iken O ve P noktalarının ait olduğu noktalar uzayı da $\mathbb{E}^n$ olsun. Eksenler birbirine dik alındığından $\mathbb{E}^n$ noktalar uzayına **Öklid uzayı ($n-$boyutlu Euclid uzayı)** diyeceğiz. Demek oluyor ki $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktasına, $\mathbb{E}^n$ de seçilen bir O başlangıç noktası esas alınmak suretiyle, $\mathbb{R}^n$ de bir $\overrightarrow{x}$ vektörü karşılık gelir. $\mathbb{R}^n$. vektör uzayına $n-$**boyutlu reel standart vektör uzayı** denir. $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ vektörler sistemine de $\mathbb{R}^n$ **vektör uzayının standart bazı** denir. Baz kavramını ilerleyen bölümlerde daha kapsamlı vereceğiz.

Tanım 11: : $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere bir

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de bir **eğri** adı verilir.

Örnek 10 : $I = \{t \mid 0 < t < 2\pi\}$ olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (r\cos t, r\sin t)$$

eğrisi düzlemde bir **çemberin parametrik denklemi**ni belirtir.

Örnek 11 :$I = \{t \mid 0 < t < 2\pi\}$ olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (a\cos t, b\sin t)$$

eğrisi düzlemde bir **elipsin parametrik denklemi**ni belirtir.

Örnek 12 : $I = \{t \mid 0 < t < 2\pi\}$ olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_2(t)) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

eğrisi uzayda bir **helis eğrisinin parametrik denklemi**ni belirtir.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.