MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ)
Hafta 3: Alt Vektör Uzayları

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 12:
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisim ve $\{V, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot\}$ cebirsel yapısı bir vektör uzayı olsun.
V cümlesinin bir $W \neq \varnothing$ alt cümlesi aynı $\oplus : W \times W \to W$ Abel grubu işlemine ve aynı $\odot : \mathbb{R} \times W \to W$ dış işlemine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı ise bu W vektör uzayına V vektör uzayının bir **alt vektör uzayı** denir.
Teorem 4: $\{V, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot\}$ bir vektör uzayı olmak üzere V nin **boştan farklı** bir **alt cümlesi** W olsun. Eğer;

1. $\forall u, v \in W$ için $u \oplus v \in W$
2. $\forall c \in \mathbb{R}$ ve $\forall u \in W$ için $cu \in W$

ise W cümlesi de bu işlemlere göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek 13: Her vektör uzayı kendisinin bir altvektör uzayıdır.
Örnek 14: $\{V, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot\}$ bir vektör uzayı olmak üzere V deki $\oplus$ işlemine göre birim elemanı θ olmak üzere $W = \{\theta\}$ cümlesi de V için bir altvektör uzayıdır. Bu uzaya **sıfır uzayı** da denir.
Örnek 15: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında z bileşeni 0 olan bütün vektörlerin cümlesi W olsun. Yani;

$$W = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının bir alt uzayıdır.
Örnek 16: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında z bileşeni 1 olan bütün vektörlerin cümlesi W olsun. Yani;

$$W = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının bir alt uzayı değildir. Çünkü;
$u = (u_1, u_2, 1) \in W$ ve $v = (v_1, v_2, 1) \in W$ için
$u \oplus v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 2) \notin W$ dır.

Örnek 17:

V bir vektör uzayı ve $\alpha_i \in V$ olmak üzere bir

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\} \subset V$$

altcümlesini alalım.

$\sum_{i=1}^{k} c_i\alpha_i$ biçimindeki vektörlere $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k$ vektörlerinin bir **lineer bileşimi** denir.

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i\alpha_i \mid \alpha_i \in S \text{ ve } c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesi V için bir alt vektör uzayıdır.

$W = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i\alpha_i \mid \alpha_i \in S \text{ ve } c_i \in \mathbb{R} \right\}$ vektör uzayına S **nin gerdiği altuzay** denir ve $W = Span\{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ ile gösterilir.

Örnek 18: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında $W = Span\left\{\overrightarrow{\alpha_1} = (0,1,1), \overrightarrow{\alpha_2} = (1,0,1), \overrightarrow{\alpha_3} = (1,1,0)\right\}$ olmak üzere $\overrightarrow{\alpha} = (-1,2,5)$ vektörü bu alt uzaya ait bir vektör müdür?

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha} &= c_1\overrightarrow{\alpha_1} + c_2\overrightarrow{\alpha_2} + c_3\overrightarrow{\alpha_3} \\
(-1,2,5) &= c_1(0,1,1) + c_2(1,0,1) + c_3(1,1,0) \\
(-1,2,5) &= (c_2 + c_3, c_1 + c_3, c_1 + c_2)
\end{aligned}$$

olup buradan $c_1 = 4, c_2 = 1$ ve $c_3 = -2$ olur. O halde

$$\overrightarrow{\alpha} = 4\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} - 2\overrightarrow{\alpha_3}$$

olduğundan $\overrightarrow{\alpha} \in W$ olur.

Teorem 5:
V bir reel vektör uzayı olmak üzere sonlu sayıda $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k \in V$ verilmiş olsun. m bir sonlu tam sayı olmak üzere

$$\beta_1, \beta_2, .., \beta_m \in Sp\{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$$

ise

$$Sp\{\beta_1, \beta_2, .., \beta_m\} \subset Sp\{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$$

dır.

Teorem 6:

V bir reel vektör uzayının sonlu sayıda altuzayları $W_1, W_2, .., W_k$ olsun. O zaman

1. $S_\cap = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$ cümlesi de V vektör uzayının bir alt uzayıdır. Bu altuzaya $W_1, W_2, .., W_k$ altuzaylarının **arakesit uzayı** denir.
2. $S_+ = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} x_i \mid x_i \in W_i, 1 \leq i \leq k \right\}$ cümlesi de V nin bir alt uzayıdır. Bu altuzaya $W_1, W_2, .., W_k$ alt uzaylarının *toplamı veya* **toplam uzayı** denir ve $S_+ = \sum_{i=1}^{k} W_i$ ile gösterilir.
3. $S_\cup = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ cümlesi V vektör uzayının bir alt uzayı olmayabilir.

Sonuç: $\{V, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot\}$ bir vektör uzayı olmak üzere V deki $\oplus$ işlemine göre birim eleman θ olsun. V cümlesinin boştan farklı bir W alt cümlesi θ elemanını içermiyorsa W alt cümlesi V vektör uzayının bir alt uzayı olamaz.

Örnek 19: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\right\}$ cümlesi boştan farklıdır ve $\mathbb{R}^3$ ün alt cümlesidir. Ancak $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının vektörlerde toplama işlemine göre birim elemanı olan $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$ vektörünü içermez. Çünkü $0 + 0 + 0 \neq 1$ dir.Dolayısıyla W cümlesi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının bir alt uzayı değildir.

Örnek 20: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ cümlesi boştan farklıdır ve $\mathbb{R}^3$ ün alt cümlesidir. Ayrıca

1. $u = (u_1, u_2, u_3) \in W \Longrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ve $v = (v_1, v_2, v_3) \in W \Longrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 0$ ve $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 = 0 + 0 = 0$ olduğundan $u + v \in W$ dır.
2. $u = (u_1, u_2, u_3) \in W \Longrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 = \lambda (u_1 + u_2 + u_3) = \lambda .0 = 0$ olduğundan $\lambda u \in W$ dır.

sağlandığından W cümlesi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.