MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ) Hafta 4: Germe ve Lineer bağımsızlık

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 13: V bir reel vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\} \subset V$ olsun. $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$c_1\alpha_1, , .., +c_2\alpha_2 + ... + c_k\alpha_k = \overrightarrow{0}$$

iken

1. $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$ olması halinde $S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ vektör cümlesi lineer bağımsızdır.
2. $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı ise $S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ vektör cümlesi lineer bağımlıdır.

Örnek 21: $\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ ve $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ vektörleri aralarında lineer bağımsızdırlar, çünkü $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$c_1 \overrightarrow{e_1} + c_2 \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}$$

ifadesinden

$$c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$$

$$(c_1, 0) + (0, c_2) = (0, 0)$$

$$(c_1, c_2) = (0, 0)$$

olacağından $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olmak zorundadır.

Örnek 22: $\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{f_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{f_2} = (0,1)$ ve $\overrightarrow{f_3} = (3,-2)$ vektörleri lineer bağımlı mıdır?
$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ için

$$c_1 \overrightarrow{f_1} + c_2 \overrightarrow{f_2} + c_3 \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{0}$$

ifadesinden

$$c_1(1,0) + c_2(0,1) + c_3(3,-2) = (0,0)$$

$$(c_1 + 3c_3, c_2 - 2c_3) = (0,0)$$

olacağından $c_1 + 3c_3 = 0$ ve $c_2 - 2c_3 = 0$ olur. Bu ise $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c_1 = -3\lambda$, $c_2 = 2\lambda$ ve $c_3 = \lambda$ demektir. O halde bu vektörler lineer bağımlıdırlar.

Uyarı: $\overrightarrow{0}$ vektörünü içine alan herbir vektör cümlesi lineer bağımlıdır.

Teorem 7: V bir reel vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n\} \subset V$ olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1n}), \\
\alpha_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2n}), \\
&\vdots \\
\alpha_n &= (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, ..., \alpha_{nn}),
\end{aligned}$$

olmak üzere

1. $\det(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ vektör cümlesi lineer bağımsızdır.
2. $\det(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \neq 0 \Leftrightarrow S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ vektör cümlesi lineer bağımlıdır.

Örnek 23: $\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{f_1} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{f_2} = (3, 1, -1)$ ve $\overrightarrow{f_3} = (2, -2, 3)$ vektörleri lineer bağımlı mıdır?

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -7 \neq 0$$

olduğundan $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ ve $\overrightarrow{f_3}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Örnek 24: $\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{f_1} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{f_2} = (3, 1, -1)$ ve $\overrightarrow{f_3} = (-1, -3, 5)$ vektörleri lineer bağımlı mıdır?

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

olduğundan $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ ve $\overrightarrow{f_3}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek 25: $\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{f_1} = (2, -1, 3)$, $\overrightarrow{f_2} = (3, k, -1)$ ve $\overrightarrow{f_3} = (1, 3, 5)$ vektörleri lineer bağımlı vektörler ise $k \in \mathbb{R}$ değeri nedir?

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

olması gerektiğinden $49 + 7k = 0$ ve dolayısıyla $k = -7$ olur.

Hatırlatma: $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ vektörleri eğer;

$$\overrightarrow{\alpha} = \lambda \overrightarrow{\beta}$$

ise $\left\{ \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \right\}$ vektör çiftine *lineer bağımlıdır* (paraleldir) denir.
$\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in V$ vektörleri eğer;

$$\overrightarrow{\alpha} \neq \lambda \overrightarrow{b}$$

ise $\left\{ \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \right\}$ vektör çiftine *lineer bağımsızdır* (paralel değildir) denir.

Örnek 27: $\mathbb{R}_2^2$ matris uzayında $\widetilde{S} =$
$\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
cümlesi lineer bağımsızdır. Çünkü;
$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ için

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4 = 0$$

ifadesinden

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + c_3 + c_4 \\ c_1 + c_2 + c_4 & c_1 + c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacağından denklem çözülürse $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$ olur.

Tanım 14: V bir vektör uzayı ve $\overrightarrow{\alpha_i} \in V$ olmak üzere bir

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\} \subset V$$

altcümlesini alalım. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} c_i \overrightarrow{\alpha_i}$ olacak şekilde $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ varsa S cümlesi V vektör uzayını geriyor denir ve

$$V = Span\{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}.$$

ile gösterilir.

Örnek 28: $\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ ve $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayını gerer. Çünkü; $\forall \overrightarrow{\alpha} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için $\overrightarrow{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} c_i \overrightarrow{e_i}$ olacak şekilde $c_1 = x, c_2 = y, c_3 = z \in \mathbb{R}$ vardır. Yani;

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha} &= (x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) \\
&= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\
&= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 29: $\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{f_1} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{f_2} = (1,0,1)$ ve $\overrightarrow{f_3} = (1,1,0)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayını gerer. Çünkü; $\forall \overrightarrow{\alpha} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için $\overrightarrow{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} c_i \overrightarrow{f_i}$ olacak şekilde $c_1 = \dfrac{y+z-x}{2}, c_2 = \dfrac{x+z-y}{2}, c_3 = \dfrac{y+x-z}{2} \in \mathbb{R}$ vardır.
Yani;

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha} &= (x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) \\
&= \frac{y+z-x}{2}\overrightarrow{f_1} + \frac{x+z-y}{2}\overrightarrow{f_2} + \frac{y+x-z}{2}\overrightarrow{f_3}
\end{aligned}$$

olur.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.