MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ)
Hafta 6: Lineer Dönüşümler ve İzomorfizmler

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 18: V ve W iki reel vektör uzayı olsunlar. Bir

$$A : V \to W$$

dönüşümü için

1. $A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) \quad ; \forall \alpha, \beta \in V$
2. $A(c\alpha) = cA(\alpha) \qquad , \forall c \in \mathbb{R}; \forall \alpha, \beta \in V$

aksiyom sağlanıyor ise bu dönüşüme bir **lineer dönüşüm (homomorfizm)** denir.

Özel Haller:

1. A lineer dönüşümü örten ise A ya bir **lineer epimorfizm**,
2. A lineer dönüşümü birebir ve örten ise bir **lineer izomorfizm**,
3. $V = W$ ise A lineer dönüşümüne bir *lineer* **endomorfizm**,
4. $V = W$ ve A lineer dönüşümü birebir ve örten ise bir **lineer otomorfizm**

adı verilir.

Tanım 19: V ve W iki reel vektör uzayı olsunlar. $\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$A : V \to W$$

dönüşümü

$$A(\alpha + c\beta) = A(\alpha) + cA(\beta)$$

koşulunu sağlıyor ise bu dönüşüme bir **lineer dönüşüm (homomorfizm)** denir.

Tanım 20: V ve W iki reel vektör uzayı ve $A : V \longrightarrow W$ bir dönüşüm olsun.
$\alpha \in V$ olmak üzere $A(\alpha) \in W$ vektörüne α vektörünün **resmi** adı verilir.
Örnek 35: $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
$(x, y, z) \longrightarrow L(x, y, z) = (x - 2y, 2x + z)$ dönüşümüne göre
$\overrightarrow{\alpha} = (2, -1, 3)$ vektörünün resmi nedir?
$L(2, -1, 3) = (2 - 2.(-1), 2.2 + 3) = (4, 7)$

Örnek 36: $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$(x,y,z) \to L(x,y,z) = (x-2y, 2x+y)$ dönüşümünün bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.
$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
A(\alpha + c\beta) &= A((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + c(\beta_1, \beta_2, \beta_3)) \\
&= A(\alpha_1 + c\beta_1, \alpha_2 + c\beta_2, \alpha_3 + c\beta_3) \\
&= ((\alpha_1 + c\beta_1) - 2(\alpha_2 + c\beta_2), 2(\alpha_2 + c\beta_2) + (\alpha_3 + c\beta_3)) \\
&= A(\alpha) + cA(\beta)
\end{aligned}$$

olduğundan L bir lineer dönüşümdür.

Örnek 37: P_n, derecesi n olan reel katsayılı polinomlar uzayı olduğuna göre

$$D : P_n \longrightarrow P_n$$

türev operatörünün bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.
$i)$. $\forall p(x), q(x) \in P_n$ için

$$D(p(x)+q(x)) = \frac{d}{dx}(p(x)+q(x)) = \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d}{dx}q(x) = D(p(x)) +$$

dır.
$ii)$.$\forall c \in \mathbb{R}$ ve $\forall p(x) \in P_n$ için

$$D(cp(x)) = \frac{d}{dx}(cp(x)) = c\frac{d}{dx}p(x) = cD(p(x))$$

dır. Böylece D dönüşümünün bir lineer dönüşüm olduğu gösterilir.

Teorem 9: V ve .W iki reel vektör uzayı ve $A : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise;

1. $\forall a_1, a_2, ..., a_k \in V$ ve $\forall c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ için

$$A(\sum_{i=1}^{k} c_i a_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i A(a_i)$$

2. $0 \in V$, sıfır vektörü için $A(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} \in W$

Örnek 38: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü $L(1,1,0) = (3,-2)$, $L(0,1,1) = (-1,4)$, $L(1,0,1) = (2,1)$ olarak tanımlansın.

1. Bu lineer dönüşümün kuralını bulunuz.
2. Bu lineer dönüşüm altında $\alpha = (2,-3,5)$ vektörünün resmini bulunuz.
3. Bu lineer dönüşüm altında resmi $\beta = (4,3)$ olan bir vektör bulunuz.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.