MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ) Hafta 7: Lineer Dönüşümlerde Görüntü Uzayı ve Çekirdek

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Teorem 10: V ve W birer reel vektör uzayı ve $A : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

1. V vektör uzayının herhangi bir altuzayı E ise

$$A(E) = \{A(\alpha) \in W \mid \alpha \in E\}$$

   cümlesi de W vektör uzayının bir altuzayıdır.

2. W vektör uzayının herhangi bir altuzayı F ise

$$A^{-1}(F) = \{\alpha \in V \mid A(\alpha) \in F\}$$

cümlesi de V vektör uzayının bir altuzayıdır.

Teorem 11: V ve W birer reel vektör uzayı ve $A : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

1. A birebirdir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in V$ için $A(\alpha) = \overrightarrow{0}$ iken $\alpha = \overrightarrow{0}$
2. A birebir ise $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ cümlesi V vektör uzayında lineer bağımsız iken $\{A(a_1), A(a_2), ..., A(a_k)\}$ cümlesi de W vektör uzayında lineer bağımsızdır.

Tanım 21: $A : V \to W$ bir lineer dönüşümü altında resimleri ayrı ayrı $\overrightarrow{0}$ olan V vektör uzayının bütün vektörlerinin cümlesi

$$S = A^{-1}(\overrightarrow{0}) = \left\{\alpha \in V \mid A(a) = \overrightarrow{0} \in W\right\}$$

V vektör uzayının bir altuzayıdır. Bu S altuzayına A **lineer dönüşümünün çekirdeği** denir. Çekirdek uzayının boyutuna, A lineer dönüşümünün **sıfırlık derecesi** denir ve $sıfırlık A$ ile gösterilir.

Tanım 22: $A : V \to W$ lineer dönüşümünde

$$A(V) = \{A(\alpha) \in W \mid \alpha \in V\}$$

cümlesi de W reel vektör uzayının bir alt uzayıdır. Bu uzaya A **lineer dönüşümünün görüntü uzayı** ve bu uzayın boyutuna da A nın **rankı** denir ve $rankA$ yazılır.

V ve W sonlu boyutlu iseler A lineer dönüşümünün çekirdeği olan S ve değerler bölgesi olan $A(V)$ de sonlu boyutlu olur.

Teorem 12:
V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $A : V \to W$ lineer dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$rank A + sıfırlık A = boy V$$

ya da

$$boy A(V) + boy S = boy V$$

olur.

Teorem 13: V ve W vektör uzayları reel ve n-boyutlu olsunlar. Bir $A : V \to W$ lineer dönüşümü için şu önermeler denktir:

1. A bir lineer izomorfizmdir,
2. A injektiftir,
3. $\alpha \in V$ için $A(\alpha) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha = \overrightarrow{0}$
4. $rankA = n$
5. $sıfırlıkA = 0$
6. A sürjektiftir

Örnek 38: $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü $L(1,0,0)=(1,1)$, $L(0,1,0)=(-1,-1)$, $L(0,0,1)=(0,0)$ olarak tanımlansın. Bu dönüşümün rankını ve sıfılık derecelerini bulunuz.

$$L(\mathbb{R}^3) = span\left\{(1,1),(-1,-1),(0,0)\right\}$$

uzayını üretir ve lineer bağımsız olduğundan
$boyL(\mathbb{R}^3) = rankL = 1$

$$rankL + s\imath f\imath rl\imath kL = boy\mathbb{R}^3$$

olduğundan $s\imath f\imath rl\imath k\ derecesi = 2$ bulunur.

Örnek 39: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to (x - y, y + z)$ lineer dönüşümü veriliyor.

1. Bu lineer dönüşümün çekirdek uzayını ve bu uzayın boyutunu bulunuz.
2. Bu lineer dönüşümün rankını bulunuz.
3. Bu lineer dönüşüm birebir midir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} S &= L^{-1}(\overrightarrow{0}) = \left\{ \overrightarrow{\alpha} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A(\overrightarrow{\alpha}) = \overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &\Longrightarrow (x-y, y+z) = (0,0) \\ &\Longrightarrow x-y=0 \text{ ve } y+z=0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow y = t \in \mathbb{R}$ denilirse $x = t \in \mathbb{R}$ ve $z = -t \in \mathbb{R}$ olur. Yani;
$S = Span\left\{ \overrightarrow{\alpha} = (1,1,-1) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ ve $boyS = 1$ olur.

$$\begin{aligned} boy\mathbb{R}^3 &= Rank\ L + sıfırlıkL \\ 3 &= Rank\ L + 1 \end{aligned}$$

olduğundan $Rank\ L = 2$ olur. Bu dönüşüm 1:1 değildir. Çünkü çekirdek uzayında sıfır vektöründen farklı vektör vardır.

Örnek 40: P_2 ikinci dereceden polinom ailesi olmak üzere

$$L : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)dt$$

lineer dönüşümü verilsin.

1. Bu lineer dönüşümün çekirdek uzayını ve bu uzayın boyutunu bulunuz.
2. Bu lineer dönüşümün rankını bulunuz.
3. Bu lineer dönüşüm birebir midir?

Çözüm:

$$S = L^{-1}(0) = \{p(t) \in P_2 \mid L(p(t)) = 0 \in \mathbb{R}\}$$

koşulunu sağlayan $p(t) = at^2 + bt + c$ elemanını arayalım.

$$L(p(t)) = \frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct \Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

$$c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$$

O zaman

$$S = at^2 + bt + (-\frac{a}{3} - \frac{b}{2})$$

tipindeki polinomlardan oluşur.

$$at^2 + bt + (-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}) = a(t^2 - \frac{1}{3}) + b(t - \frac{1}{2})$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$S = Sp\left\{(t^2 - \frac{1}{3}), (t - \frac{1}{2})\right\}$$

Böylece $\left\{(t^2 - \frac{1}{3}), (t - \frac{1}{2})\right\}$ çekirdek uzayın bir bazıdır. O halde $boyS = 2$ olur. $boyS = 2$ olduğundan L birebir değildir.

Örnek 41 : P_2 ikinci dereceden polinom ailesi ve $p^{'}(t)$, $p(t)$ polinomunun türevi olmal üzere

$$L : P_2 \longrightarrow P_2$$

$$L(p(t)) = t.p^{'}(t)$$

dönüşümü verilsin.

1. Bu dönüşümün lineer olduğunu gösteriniz.
2. Bu lineer dönüşümün çekirdek uzayını ve bu uzayın boyutunu bulunuz.
3. Bu lineer dönüşümün rankını bulunuz.
4. Bu lineer dönüşüm birebir midir?

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.