MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ) Hafta 8: İç Çarpım

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 23: V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$f : V \times V \to \mathbb{R} \; ; \; (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \to f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

dönüşümü aşağıda verilen aksiyomları sağlıyorsa f dönüşümüne bir **iç çarpım dönüşümü** adı verilir.

1. *Simetri Aksiyomu:* $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ için $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
2. *Bilineerlik Aksiyomu:* $\forall \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v} \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f\left(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}\right) &= af\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}\right) + bf\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}\right) \\ f\left(\overrightarrow{v}, a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}\right) &= af\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_1}\right) + bf\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_2}\right) \end{aligned}$$

3. *Pozitif Tanımlı Olma Aksiyomu:* $\forall \overrightarrow{u} \in V$ için$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0 & , \overrightarrow{u} = 0 \\ f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \rangle\, 0 & , \overrightarrow{u} \neq 0 \end{array} \right\}$

Örnek 42:
$X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (X, Y) \quad &\to \quad f(X, Y) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ &= \quad x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 \end{aligned}$$

dönüşümü bir iç çarpım fonksiyonudur. Gerçekten;

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_1 + y_1 x_2 + 2 y_2 x_2 \\ &= f(Y, X) \end{aligned}$$

dır. O halde *simetri aksiyomu* sağlanır.

$\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ile $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(aX + bY, Z) &= f((ax_1 + by_1, ax_2 + by_2), (z_1, z_2)) \\ &= (ax_1 + by_1)z_1 + (ax_1 + by_1)z_2 \\ &\quad + (ax_2 + by_2)z_1 + 2(ax_2 + by_2)z_2 \\ &= ax_1z_1 + by_1z_1 + ax_1z_2 + by_1z_2 \\ &\quad + ax_2z_1 + by_2z_1 + 2ax_2z_2 + 2by_2z_2 \\ &= af(X, Z) + bf(Y, Z) \end{aligned}$$

olduğundan bi-lineerlik aksiyomu sağlanır.

$\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} f(X, X) &= f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + 2x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan
$X \neq \overrightarrow{0}$ ise, x_1, x_2 den en az biri $\neq 0$ olduğundan $f(X, X) > 0$ olacaktır.
$X = \overrightarrow{0}$ ise $x_1 = x_2 = 0$ olacağından $f(X, X) = 0$ olacağı aşikardır.

Tanım 24: $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanan

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dönüşümü bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpım fonksiyonuna **Öklid Anlamında İç Çarpım** *veya* **standart iç çarpım** denir.

Tanım 25: V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \; ; \; (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \rightarrow f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

iç çarpımına göre bir $u \in \mathbb{R}^n$ vektörünün boyu $\|u\|_f$ ile gösterilir ve **vektörünün normu** olarak adlandırılır.

$$\|u\|_f = \sqrt{|f\,(u,u)|}$$

biçiminde tanımlanır.

Öklid anlamındaki iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart Öklid uzayını ele alalım.
$\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}\|X\| &= \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\end{aligned}$$

değerine X vektörünün **standart Öklid iç çarpımına göre normu** adı verilir. $\|X\| = 1$ ise X vektörüne **birim vektör** denir.

Tanım 26: $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında $A = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere A ile B noktaları arası uzaklık

$$d\left(A, B\right) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sum_{i=1}^{n} \left(b_{i-}a_i\right)^2$$

şeklindedir.

Örnek 43: $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında tanımlı standart Öklid iç çarpımına göre

1. $\overrightarrow{\alpha} = (3, -4)$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.
2. $A(-3, 2)$ ve $B = (5, -4)$ noktaları arası uzaklığı bulunuz.
3. Merkezil birim çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{\alpha} \right\| &= \sqrt{\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha} \rangle} \\ &= \sqrt{\langle (3,-4),(3,-4) \rangle} \\ &= \sqrt{3.3 + (-4)(-4)} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\| \\
&= \sqrt{(5-(-3))^2 + (-4-2)^2} \\
&= 10
\end{aligned}
$$

$O(0,0)$ ve $P(x,y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d\left(O,P\right) &= \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{\langle (x,y),(x,y)\rangle} \\ 1 &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

olduğundan merkezil birim çemberin standart Öklid iç çarpımına göre denklemi $x^2+y^2=1$ olur.

Örnek 44: $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\to f(X, Y) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 \end{aligned}$$

iç çarpımına göre

1. $\overrightarrow{\alpha} = (3, -4)$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.
2. $A(-3, 2)$ ve $B = (5, -4)$ noktaları arası uzaklığı bulunuz.
3. Merkezil birim çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|_f &= \sqrt{f\left(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}\right)} \\
&= \sqrt{f((3,-4),(3,-4))} \\
&= \sqrt{3.3 + 3.(-4) + (-4).3 + 2.(-4)(-4)} \\
&= \sqrt{17}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_f(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|_f = \sqrt{f(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB})} = \sqrt{f((8,-6),(8,-6))} \\
&= \sqrt{8.8 + 8.(-6) + (-6).8 + 2.(-6)(-6)} \\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

$O(0,0)$ ve $P(x,y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_f\left(O,P\right) &= \left\|\overrightarrow{OP}\right\|_f = \sqrt{f\left((x,y),(x,y)\right)} \\ 1 &= \sqrt{x.x+x.y+y.x+2.y.y} \end{aligned}$$

olduğundan merkezil birim çemberin f iç çarpımına göre denklemi $(x+y)^2+y^2=1$ olur.

Örnek 45: $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (X, Y) & \to & g(X, Y) = g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ & = & \left\{ \begin{array}{cc} x_1 y_1 & , X = Y \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 & , X \neq Y \end{array} \right\} \end{array}$$

iç çarpımına göre

1. $\overrightarrow{\alpha} = (3, -4)$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.
2. $A(-3, 2)$ ve $B = (5, -4)$ noktaları arası uzaklığı bulunuz.
3. Merkezil birim çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{\alpha}\right\|_g &= \sqrt{g\left(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}\right)} \\
&= \sqrt{g((3,-4),(3,-4))} \\
&= \sqrt{3.3} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_g\left(A, B\right) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|_g = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB})} = \sqrt{g((8,-6),(8,-6))} \\
&= \sqrt{8.8} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

$O(0,0)$ ve $P(x,y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_g(O,P) &= \left\| \overrightarrow{OP} \right\|_g = \sqrt{g\left((x,y),(x,y)\right)} \\ 1 &= \sqrt{x.x} \end{aligned}$$

olduğundan merkezil birim çemberin g iç çarpımına göre denklemi $|x| = 1$ olur.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.