# MAT 114 LİNEER CEBİR ( İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ) Hafta 11: Lineer Dönüşümler Uzayı

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

$n$ ve $m$ boyutlu iki reel vektör uzayı $V$ ve $W$ olmak üzere , $V$ vektör uzayının bir tabanı

$$\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n\}$$

ve $W$ vektör uzayının bir bazı

$$\psi = \{\beta_1, \beta_2, ...., \beta_m\}$$

şeklinde verilsin. $A : V \longrightarrow W$ lineer dönüşümü altında $1 \leq i \leq n$ için $A(\alpha_i)$ vektörlerini $W$ vektör uzayının $\psi$ bazına göre ifade edelim. Bu ifade

$$A(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\beta_j$$

ya da daha açık yazılışla

$$
\begin{aligned}
A(\alpha_1) &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \ldots + a_{m1}\beta_m \\
A(\alpha_2) &= a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{m2}\beta_m \\
\\
A(\alpha_n) &= a_{1n}\beta_1 + a_{2n}\beta_2 + \ldots + a_{mn}\beta_m
\end{aligned}
$$

olur ki bu da $A : V \to W$ lineer dönüşümü için

$$
\mathcal{A}_{\phi,\psi} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

şeklinde bir matris belirtir.

**Tanım 31:** $n$ ve $m$ boyutlu iki reel vektör uzayı $V$ ve $W$ olmak üzere , $V$ vektör uzayının bir tabanı

$$\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n\}$$

ve $W$ vektör uzayının bir bazı

$$\psi = \{\beta_1, \beta_2, ...., \beta_m\}$$

şeklinde verilsin. $\mathcal{A}_{\phi,\psi} \in \mathbb{R}_n^m$ matrisine $A$ **lineer dönüşümünün $\phi$ ve $\psi$ bazlarına göre matrisi** denir.

**Örnek 53:** $A:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x,y) = (x-y, x+y, -x)$ lineer

dönüşümü verilsin. $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzaylarının

$$\phi = \{\alpha_1 = (2,1), \alpha_2 = (-1,2)\}$$

ve

$$\psi = \{\beta_1 = (0,1,1), \beta_2 = (1,0,1), \beta_3 = (1,1,0)\}$$

bazlarına göre $A$ lineer dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{A}_{\phi,\psi}$ matrisini bulunuz.

**Örnek 54:** $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y, z) = (x - y + z, x + y - 2z)$ lineer dönüşümü verilsin. $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzaylarının

$$\phi = \{\beta_1 = (0, 1, 1), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (1, 1, 0)\}$$

ve

$$\psi = \{\alpha_1 = (2, 1), \alpha_2 = (-1, 2)\}$$

bazlarına göre $A$ lineer dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{A}_{\phi,\psi}$ matrisini bulunuz.

**Örnek 55:** $L : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $L\left(p(x)\right) = x.p'(x)$ lineer dönüşümü verilsin. $\mathbb{P}^2$ ikinci dereceden polinom fonksiyonların uzayının

$$\phi = \left\{1, 1 - x, 1 + x^2\right\}$$

ve

$$\psi = \left\{1, x + 1, x^2\right\}$$

bazlarına göre $L$ lineer dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{L}_{\phi,\psi}$ matrisini bulunuz.

**Teorem 29:** $n$ ve $m$ boyutlu iki reel vektör uzayı $V$ ve $W$ olmak üzere , $V$ vektör uzayının bir tabanı $\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n\}$ ve $W$ vektör uzayının bir bazı $\psi = \{\beta_1, \beta_2, ...., \beta_m\}$ şeklinde verilsin. $A : V \to W$ ve $B : V \to W$ lineer dönüşümleri için

$$(A + B)_{\phi,\psi} = A_{\phi,\psi} + B_{\phi,\psi}$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda A)_{\phi,\psi} = \lambda . A_{\phi,\psi}$$

dır.

**Teorem 30:** $A : V \to W$ lineer dönüşümünün $V$ vektör uzayının $\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n\}$ ve $W$ vektör uzayının $\psi = \{\beta_1, \beta_2, ...., \beta_m\}$ bazlarına göre matrisi $A_{\phi,\psi}$ ise $\forall \alpha \in V$ için

$$A_{\phi,\psi} . [\alpha]_\phi = [A(\alpha)]_\psi$$

dir.

**Örnek 55:** $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzaylarının iki bazı, sırasıyla,

$$\phi = \{\alpha_1 = (0,1,1), \alpha_2 = (1,0,1), \alpha_3 = (1,1,0)\}$$

ve

$$\psi = \{\beta_1 = (2,1), \beta_2 = (-1,2)\}$$

olsun. $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $A$ matrisine $\phi$ ve $\psi$ tabanlarına göre karşılık gelen lineer dönüşümü bulunuz.

**Tanım 32:** $n$ -boyutlu bir reel vektör uzayı $V$ ve $V$ vektör uzayının bir tabanı $\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n\}$ olsun. Bu durumda $A : V \rightarrow V$ lineer dönüşümünün $\phi$ bazına göre matrisi $A_{\phi,\varphi}$ matrisi kısaca $A_\phi$ ile gösterilir.
**Tanım 33:** $n$ -boyutlu bir reel vektör uzayı $V$ ve $V$ vektör uzayının iki farklı tabanı $\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n\}$ ve $\phi' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, ...., \alpha'_n\}$ olmak üzere

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i$$

ile oluşturulan $P = [p_{ij}]_{n\times n}$ matrisine $\phi'$ **bazından** $\phi$ **bazına geçiş matrisi** ve $P' = \left[p'_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisine $\phi$ **bazından** $\phi'$ **bazına geçiş matrisi** denir.

**Örnek 56:** $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayının iki bazı, sırasıyla,

$$\phi = \{\alpha_1 = (1,1)\,, \alpha_2 = (-1,1)\}$$

ve

$$\phi' = \{\alpha_1' = (2,1)\,, \alpha_2' = (-1,2)\}$$

olsun.

1. $\phi'$ bazından $\phi$ bazına geçiş matrisini bulunuz.
2. $\phi$ bazından $\phi'$ bazına geçiş matrisini bulunuz.

**Teorem 31:** $n$ -boyutlu bir reel vektör uzayı $V$ ve $V$ vektör uzayının iki farklı tabanı $\phi$ ve $\phi'$olsun. $\phi'$ bazından $\phi$ bazına geçiş matrisi $P$ ve $\phi$ bazından $\phi'$ bazına geçiş matrisi $P'$ olmak üzere

$$P' = P^{-1}$$

dir.

**Örnek 57:** $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının iki bazı, sırasıyla,

$$\phi = \{\alpha_1 = (0, 1, 1)\, , \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 0)\}$$

ve

$$\phi' = \{\alpha_1' = (-1, 1, 1)\, , \alpha_2' = (1, -1, 1), \alpha_2' = (1, 1, -1)\}$$

olsun.

1. $\phi'$ bazından $\phi$ bazına geçiş matrisini bulunuz.
2. $\phi$ bazından $\phi'$ bazına geçiş matrisini bulunuz.

**Teorem 32:** $n$ ve $m$ boyutlu iki reel vektör uzayı $V$ ve $W$ olmak üzere , $V$ vektör uzayının iki tabanı $\phi$ , $\phi'$ ve $W$ vektör uzayının iki bazı $\psi$ , $\psi'$ olsun. $\phi'$ bazından $\phi$ bazına geçiş matrisi $P$ ve $\psi'$ bazından $\psi$ bazına geçiş matrisi $Q$ olmak üzere $A : V \longrightarrow W$ lineer dönüşümü için

$$A_{\phi',\psi'} = Q^{-1} A_{\phi,\psi} P$$

dir.

**Örnek 58:** $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y,z) = (x-y+z, x+y-2z)$ lineer dönüşümü verilsin. $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının iki bazı, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \phi &= \{\alpha_1 = (0,1,1), \alpha_2 = (1,0,1), \alpha_2 = (1,1,0)\}, \\ \phi' &= \{\alpha_1' = (-1,1,1), \alpha_2' = (1,-1,1), \alpha_2' = (1,1,-1)\} \end{aligned}$$

ve $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayının iki bazı, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \phi &= \{\alpha_1 = (1,1), \alpha_2 = (-1,1)\}, \\ \phi' &= \{\alpha_1' = (2,1), \alpha_2' = (-1,2)\} \end{aligned}$$

olsun.

1. $A_{\phi,\psi}$ matrisini bulunuz.
2. $A_{\phi',\psi'}$ matrisini bulunuz ve $A_{\phi',\psi'} = Q^{-1}A_{\phi,\psi}P$ eşitliğini sağladığını gösteriniz.

**Sonuç:** $n$ ve $m$ boyutlu iki reel vektör uzayı $V$ ve $W$ olmak üzere , $V$ vektör uzayının iki tabanı $\phi$ , $\phi'$ ve $W$ vektör uzayının iki bazı $\psi$ , $\psi'$ olsun. $A : V \to W$ lineer dönüşümü için $A_{\phi',\psi'}$ ve $A_{\phi,\psi}$ matrisleri denktir.
$V = W$ ise $V$ vektör uzayının iki tabanı $\phi$ , $\phi'$ olmak üzere $A : V \to V$ lineer dönüşümü için

$$A_{\phi'} = P^{-1} A_{\phi} P$$

dir.

**Sonuç:** $n$ boyutlu bir reel vektör uzayı $V$ ve bu vektör uzayının bir tabanı $\phi$ ve $V$ vektör uzayının bir tabanı $\phi$ olsun. $A : V \to V$ lineer dönüşümü için $A_\phi = I_n$ ise $A$ dönüşümü $V$ vektör uzayının özdeşlik dönüşümü olur.

**Teorem 33:** $n$ boyutlu bir reel vektör uzayı $V$ ve bu vektör uzayının bir tabanı $\phi$ olsun. $A : V \to V$ lineer dönüşümünün $\phi$ bazına göre matrisi olan $A_\phi$ regüler matris ise tersi mevcut ise $A : V \to V$ lineer dönüşümünün de tersi vardır ve

$$\left(A^{-1}\right)_\phi = \left(A_\phi\right)^{-1}$$

dir.

**Teorem 34:** $n$ boyutlu bir reel vektör uzayı $V$ ve bu vektör uzayının iki tabanı $\phi$ ve $\phi'$ olsun. $A : V \to V$ lineer dönüşümünün $\phi$ bazına göre matrisi olan $A_\phi$ regüler matris ise tersinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $A : V \to V$ lineer dönüşümünün de tersinin mevcut ve

$$\left(A^{-1}\right)_\phi = \left(A_\phi\right)^{-1}$$

olmasıdır.

**Kaynaklar**

**1)** A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.

**2)** B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.

**3)** F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.

**4)** H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.

**5)** H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.