MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ) Hafta 13: Özdeğerler ve Özvektörler

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 34: n boyutlu bir reel vektör uzayı V ve $A : V \to V$ bir lineer dönüşüm ($\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ de bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris) olsun. **Sıfır vektörü olmayan** bir $\alpha \in V$ vektörü için $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$A(\alpha) = \lambda\alpha$$

koşulunu sağlayan $\lambda \in \mathbb{R}$ değerlerine A lineer dönüşümünün **karakteristik değerleri** (**özdeğerleri veya eigen değerleri**) ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ değerine karşılık gelen α vektörlerine de A lineer dönüşümünün **karakteristik vektörleri** (**özvektörleri veya eigen vektörleri**) adı verilir. Bu karakteristik vektörlerin gerdiği

$$V_\lambda = \{\alpha \in V : A(\alpha) = \lambda\alpha,\ A : V \to V,\ \alpha \neq 0\}$$

karakteristik uzay (**özuzay veya eigen uzay**) adı verilir.

Geometrik olarak; karakteristik vektör bir lineer dönüşüm altında doğrultusu değişmeyen vektör demektir.

Teorem 35: n boyutlu bir reel vektör uzayı V ve $A : V \longrightarrow V$ bir lineer dönüşüm olsun. Bir $\alpha \in V$ eğer karakteristik vektör ise bu vektöre karşılık gelen bir ve yalnız bir karakteristik değer vardır.

Teorem 36: n boyutlu bir reel vektör uzayı V ve $A : V \longrightarrow V$ bir lineer dönüşüm olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{R}$ değerine karşılık gelen birden fazla karakteristik vektör vardır.

Örnek 59:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik değerleri

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

denkleminden $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \sqrt{3}$ ve $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ olur.

Örnek 60: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_2^2$ matrisi veriliyor. Bu matrise ait

1. karakteristik değerleri bulunuz.
2. karakteristik vektörleri bulunuz.
3. karakteristik uzayları bulunuz.

Tanım 35: n boyutlu bir reel vektör uzayı V ve $A : V \rightarrow V$ bir

lineer dönüşüm ($\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ de bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris) olsun. **Sıfır vektörü olmayan** bir $\alpha \in V$ vektörü için $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{A}.\alpha &= \lambda.\alpha, \ \alpha = \left[\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{array} \right]^T \\ \mathcal{A}.\alpha - \lambda.\alpha &= 0, \\ \left(\mathcal{A} - \lambda.I_n\right).\alpha &= 0, \end{aligned}$$

Bu denklem lineer homogen denklemdir. Aşikar olmayan çözümlerinin olması için

$$\det\left(\mathcal{A} - \lambda.I_n\right) = 0$$

olmalıdır. Bu durumda

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det\left(\mathcal{A} - \lambda.I_n\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}, a_0 = 1$$

şeklinde bir polinom elde edilir. Bu polinoma A **lineer dönüşümünün** veya $\mathcal{A}$ **matrisinin karakteristik polinomu** denir.

Teorem 37: $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki benzer matris olmak üzere bu matrislere ait karakteristik değerler aynıdır.

Teorem 38: Her matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür. Bu teorem literatürde **Cayley Hamilton Teoremi** olarak bilinir.

Örnek 61: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_2^2$ matrisi veriliyor. Bu matrise ait

1. karakteristik polinomu bulunuz.
2. karakteristik polinomu kullanarak Cayley Hamilton Teoremini gerçekleyiniz.

Örnek 62: $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x,y,z) = (x+y, z-y, x-z)$ lineer dönüşümü verilsin. Bu lineer dönüşümün

1. karakteristik polinomu bulunuz.
2. karakteristik vektörlerini bulunuz.
3. karakteristik polinomu kullanarak Cayley Hamilton Teoremini gerçekleyiniz.

Örnek 63: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_2^2$ matrisi veriliyor. Bu matrise ait

1. karakteristik polinomu bulunuz.
2. karakteristik değerleri bulunuz.
3. karakteristik vektörleri ve uzayları bulunuz.
4. karakteristik polinomu kullanarak Cayley Hamilton Teoremini gerçekleyiniz.

Sonuç: $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det\left(\mathcal{A} - \lambda . I_n\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}, a_0 = 1$$

olduğunda Cayley Hamilton Teoremi uyarınca

$$\mathcal{A}^n + a_1 \mathcal{A}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathcal{A} + a_n I_n = 0$$

ve burdan gerekli işlemler yapılarak

$$\mathcal{A}^{-1} = -\frac{1}{a_n}\left\{\mathcal{A}^{n-1} + a_1 \mathcal{A}^{n-2} \ldots + a_{n-1} I_n\right\}$$

olur.

Örnek 64: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_2^2$ matrisi veriliyor. Cayley Hamilton Teoremi yardımıyla bu matrisin inversi olan matrisi bulunuz.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.

2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.

3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.

4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.

5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.