MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ)
Hafta 14: Özdeğerler ve Özvektörler

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Köşegenleştirme

Tanım 36: $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ matrisi bir köşegen matrise benzer ise $\mathcal{A}$ matrisine **köşegenleştirilebilir matris** adı verilir. $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin köşegen matrise benzer olması demek

$$D = P^{-1}AP$$

matrisi bir köşegen matris olacal şekilde regüler bir P matrisinin bulunması demektir. Burada P matrisi karakteristik uzayların baz vektörlerini sütun kabul eden matristir. Burada D matrisine $\mathcal{A}$ matrisinin köşegen matrisi adı verilir.
$\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin birbirinden farklı n tane özdeğeri varsa bu matris köşegenleştirilebilirdir.
Uyarı: $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin birbirinden farklı n tane özdeğeri yoksa köşegenleştirilemez denilemez. Ancak $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n$ matrisi köşegenleştirilemeyen matris ise n tane farklı karakteristik değeri olamaz.

Örnek 65: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini köşegen hale getiriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{aligned}$$

$P_A(\lambda) = 0$ denkleminden matrisin karakteristik değerleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 4$ olur.

$\lambda_1 = 1$ için karşılık gelen karakteristik vektör $AX = X$ denkleminden

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$3x_1 + x_2 = x_1$$

$$2x_1 + 2x_2 = x_2$$

$$x_1 = -2x_2$$

$$X_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 4$ için karşılık gelen karakteristik vektör $AX = 4X$ denkleminden

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$3x_1 + x_2 = 4x_1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 4x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$$X_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ lineer bağımsız olduğundan A matrisi köşegenleştirilebilir.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Örnek 66:

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x, y, z) = (3x, 2x - y, x + 2y + z)$$

lineer dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_3^3$ matrisi köşegenleştirilebilir bir matris midir? Cevabınız EVET ise $\mathcal{A}$ matrisinin benzer olduğu D matrisini ve regüler P matrisini bulunuz.

Örnek 67:

$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x, y, z) = (x - 2y + 2z, y - 2x - 2z, -2x + 2y + 3z)$

lineer dönüşümü köşegenleştirilebilir midir? Cevabınız EVET ise $\mathcal{A}$ matrisinin benzer olduğu D matrisini ve regüler P matrisini bulunuz.

Örnek 68:

$A:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, A\left(x,y,z\right) = \left(-2x+2y+3z, -3x+3y+5z, x-y-z\right)$

lineer dönüşümü köşegenleştirilebilir midir? Cevabınız EVET ise $\mathcal{A}$ matrisinin benzer olduğu D matrisini ve regüler P matrisini bulunuz.

Örnek 69:

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A\left(x, y, z\right) = \left(-4x - 5y - 3z, 3x + 4y - 2z, -2x - 2y\right)$$

lineer dönüşümü köşegenleştirilebilir midir? Cevabınız EVET ise $\mathcal{A}$ matrisinin benzer olduğu D matrisini ve regüler P matrisini bulunuz.

Örnek 70:

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x, y, z) = (x + 2y, y, 2x - 2z)$$

lineer dönüşümü köşegenleştirilebilir midir? Cevabınız EVET ise $\mathcal{A}$ matrisinin benzer olduğu D matrisini ve regüler P matrisini bulunuz.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.