KÜMELER

İyi tanımlanmış nesneler topluluğuna "küme" denir. Bir küme, birbirinden farklı nesnelerden oluşur. Bu nesneler somut veya soyut olabilir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine "eleman(öğe) " denir. Bir kümenin belirlenebilmesi için, elemanlarının iyi tanımlanmış olması gerekir.

Kümeler genellikle A, B, C, … gibi büyük harflerle gösterilirler. Kümenin elemanları ise a, b, c, … gibi küçük harflerle gösterilir. Kümede bir elemanın o kümeye ait olduğunu belirtmek için "$\in$" sembolü kullanılır. Eğer bir eleman kümeye ait değilse "$\notin$" sembolü kullanılır.

Örnek: $A=\{1, 2, a, 3, 5, e, f\}$ kümesi verilsin. Bu kümede verilenlere göre:

$1\in A$	$5\in a$	$b\notin A$	$\{a\}\notin A$
$2\in A$	$e\in A$	$9\notin A$	$m\notin A$
$a\in A$	$f\in A$	$3\in A$	$\{1, 2\}\notin A$

NOT: * Kümede bir eleman birden fazla yazılamaz.

*Kümede elemanların yer değiştirmesi, kümeyi değiştirmez.

*Bir A kümesinin eleman sayısı, s(A) ile gösterilir.

Örnek: $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 8, 5, 7, 13\}$, $C=\{<, >, =\}$ kümelerinin eleman sayıları kaçtır?

çözüm: s(A)=4, s(B)=6, s(C)=3

Boş Küme: Elemanı olmayan kümeye "boş küme" denir. Boş küme "$\varnothing$" ya da "$\{\ \}$" sembolleri kullanılarak gösterilir.

$s(\varnothing)=0$ ' dır.

Uyarı: $\{\varnothing\}$ ya da $\{0\}$ kümeleri boş küme değildir. Bu kümeler birer elemana sahiptir.

Soru: Saçı doğuştan mor renkli olanların kümesi nedir?

Cevap: Saçı doğuştan mor renkli olan hiç kimse olmadığı için, bu kümeye yazılabilecek hiçbir eleman yoktur. Bu nedenle soruda cevabı istenen küme “$\varnothing$” dir.

Eşit Küme: Aynı elemanlardan oluşan kümelere “eşit kümeler” denir. Başka bir deyişle, elemanları ve eleman sayıları aynı olan kümeler eşittir. (Eşitlik işaret:=)

Denk Küme: Eleman sayıları aynı olan kümelere “denk kümeler” denir. Yani, farklı elemanlardan oluşan, ancak eleman sayıları aynı olan kümeler denktir. (Denklik işareti: $\equiv$)

Eşit olan kümeler aynı zamanda denk kümelerdir. Fakat denk olan kümeler eşit olmayabilir.

Örnek:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{a,\ b,\ c\} \Rightarrow s(A)=3 \\ B=\{1,\ 2,\ 3\} \Rightarrow s(B)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow A \equiv B \text{ ' dir.}$$

Örnek:

$$\left.\begin{array}{l} C=\{q,\ r,\ t,\ p\} \\ D=\{t,\ r,\ p,\ q\} \end{array}\right\} \Rightarrow C=D \text{ ' dir.}$$

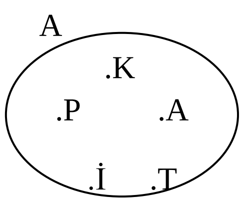
Kümelerin Gösterimi:

Kümeler üç farklı biçimde gösterilebilir:

1.Venn şeması ile, **2.**Liste yöntemi ile, **3.**Ortak özellik yöntemi ile.

Örnek: “KİTAP” kelimesindeki harfler ile oluşturulacak kümeyi, Venn şeması, liste yöntemi ve ortak özellik yöntemini kullanarak gösteriniz.

çözüm: * Venn şeması ile:

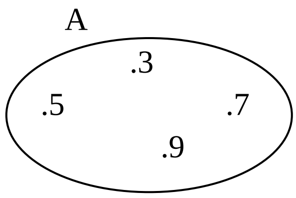


*Liste yöntemi ile: A=$\{$K, İ, T, A, P$\}$

*Ortak özellik yöntemi ile: A=$\{$"KİTAP" kelimesindeki harfler$\}$

Örnek: 2’den büyük, 10’ dan küçük tek sayıların yazılacağı kümeyi 3 farklı biçimde gösteriniz.

çözüm: * Venn şeması ile:



*Liste yöntemi ile: A=$\{3, 5, 7, 9\}$

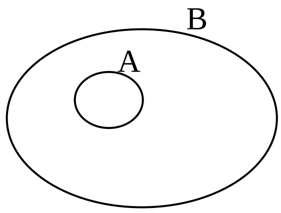
*Ortak özellik yöntemi ile: A=$\{x \in N$: 2<x<10 ve x tek sayı$\}$

Örnek: A= $\{x \in N : x < 5\}$ ve B= $\{x \in N : x^2 < 20\}$ kümelerinin elemanlarını liste yöntemi ile yazarak, eşit mi yoksa denk kümeler mi olduklarını belirleyiniz.

çözüm: $\left.\begin{array}{l} A = \{0,1,2,3,4\} \\ B = \{0,1,2,3,4\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

Alt Küme: A ve B herhangi iki küme olsun. A’nın her elemanı, B’nin de bir elemanı ise, A kümesine B kümesinin bir “alt kümesi” dir denir ve $A \subset B$ biçiminde gösterilir.

$A \subset B$: A kümesi, B kümesinin bir alt kümesidir.
$B \supset A$: B kümesi, A kümesini kapsar.

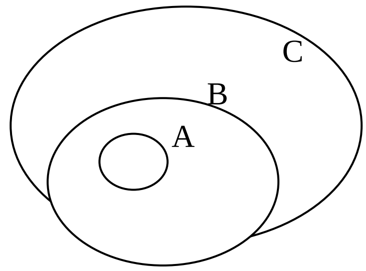


Eğer A kümesi, B kümesinin alt kümesi değilse bu durum “$A \not\subset B$” şeklinde gösterilir.

Özalt Küme: Bir kümenin kendisi dışındaki, diğer bütün alt kümelerine “özalt” kümeleri denir.

Alt Kümenin Özellikleri:

A herhangi bir küme olmak üzere;



*$\emptyset \subset A$: Boş küme her kümenin bir alt kümesidir.
*$A \subset A$: Her küme kendisinin bir alt kümesidir.
*$A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A=B'dir.
*$A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$'dir.
*s(A)=n ise A' nın alt küme sayısı: 2^n ' dir.
*s(A)=n ise: A' nın özalt küme sayısı: $2^n - 1$ ' dir.

Örnek: A= $\{1, 2, 3\}$ kümesinin alt kümelerini yazınız.

çözüm: A kümesinin bütün alt kümeleri:

0 elemanlı alt kümesi: $\emptyset$
1 elemanlı alt kümeler: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
2 elemanlı alt kümeler: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$
3 elemanlı alt kümeler: $\{1,2,3\}$=A

Görülüyor ki; A kümesinin alt kümelerinin sayısı: $2^n = 2^4 = 16$ ' dır.

Örnek: B=$\{a, b, c, d\}$ kümesinin özalt kümelerini yazınız.

çözüm: B kümesinin özalt kümeleri, bütün alt kümeleri içinde kendisi dışındaki alt kümeler olacaktır. Buradan:

0 elemanlı alt kümesi: $\emptyset$
1 elemanlı alt kümeler: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$
2 elemanlı alt kümeler: $\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}$
3 elemanlı alt kümeler: $\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$

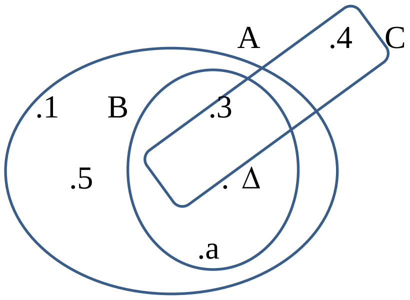
Görülüyor ki; B kümesinin özalt kümelerinin sayısı: $2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$ ' dir.

Örnek: s(C)=5 olduğuna göre C kümesinin bütün alt kümelerinin sayısı kaçtır?

çözüm: 2^5 = 2.2.2.2.2= 32' dir.

Örnek: A= $\{1,3,5,\Delta,a\}$, B= $\{\Delta,a,3\}$ ve C= $\{3,4\}$ kümeleri veriliyor. Liste yöntemi ile verilen bu kümeleri Venn şeması çizerek gösteriniz. Kümeler arasındaki ilişkiyi, alt küme ve kapsama sembollerini kullanarak yazınız.

çözüm:



$B \subset A$ (veya $A \supset B$)

$C \not\subset B$

$B \not\subset C$

$C \not\subset A$

Örnek: M= $\{a,b,\{1,2\},\Delta\}$ kümesi veriliyor.

I. s(M)=4 II. $\{1,2\} \in M$ III.$2 \in M$ IV. $\{1,2\} \subset M$ V. $\{a,b\} \subset M$

Yukarıdaki ifadelerin kaçı doğrudur?

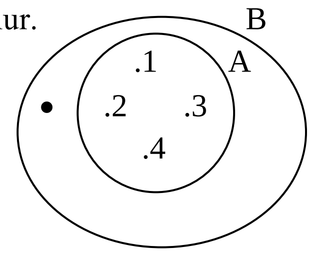
a)1 b)2 c)3 d)4 e)5

Cevap: (c) şıkkı.

Örnek: A=$\{1,2,3,4\}$ kümesi, B kümesinin alt kümelerinden biridir. $A \neq B$ olduğuna göre, B kümesinin alt küme sayısı <u>en az</u> kaçtır?

çözüm: A, B'nin alt kümesi ise A' nın bütün elemanları B'nin de elemanlarıdır. $A \neq B$ ise, B' nin kendisine ait en az bir elemanı vardır.

Bir kümenin alt küme sayısını en az bulabilmek için, eleman sayısını en az seçmemiz gerekir. Buradan, B' nin eleman sayısı en az 5 olur.

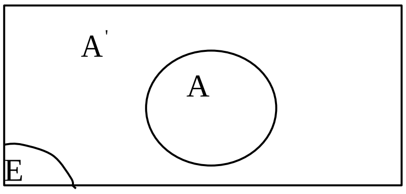


s(B)=5 $\Rightarrow$B' nin alt küme sayısı en az: $2^5 = 32$ olarak bulunur.

Evrensel Küme ve Tümleme Kavramı:

Belirli bir alandaki nesnelerin tümünü içeren kümeye "evrensel küme" denir. Evrensel küme genellikle "E" ile gösterilir.

Bir A kümesine ait olmayıp evrensel kümeye ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin "tümleyeni" denir ve A' (veya $\overline{A}$) ile gösterilir.



Tümlemenin Özellikleri:

1. $E' = \varnothing$
2. $\varnothing' = E$
3. $\left(A'\right)' = A$
4. $s(A)+s\left(A'\right)=s(E)$
5. $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

Örnek: s(A)=5 ve s(E)=28 olduğuna göre $s\left(A'\right)$ kaçtır?

çözüm: $s(A)+s\left(A'\right)=s(E) \Rightarrow 5+ s\left(A'\right)=28$

$\Rightarrow s\left(A'\right)=28-5=23$ olarak bulunur.

Örnek: $A \subset E$ ve $B \subset E$ olmak üzere, $s(A)+s(B') = 7$ ve $s(A') + s(B) = 11$ ise s(E) kaçtır?

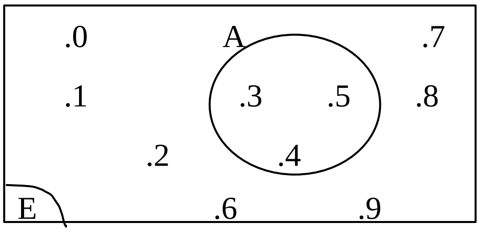
çözüm:

$$
\begin{array}{rl}
 & s(A)+s(B') = 7 \\
+ & s(A')+s(B) = 11 \\
\hline
\end{array}
$$

$\underbrace{s(A)+s(A')}_{s(E)}+\underbrace{s(B)+s(B')}_{s(E)}=18 \Rightarrow 2.s(E)=18 \Rightarrow s(E)=\dfrac{18}{2}=9$ olarak bulunur.

Örnek: A=$\{3,4,5\}$ ve E=$\{$Sayıları yazmada kullandığımız rakamlar$\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A' kümesini Venn şeması çizerek belirleyiniz.

çözüm:



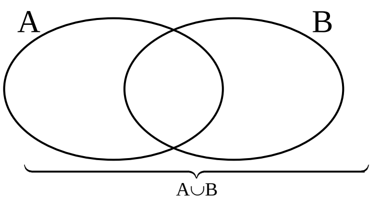
E=$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

A=$\{3,4,5\}$

$A' = \{0,1,2,6,7,8,9\}$ olarak elde edilir.

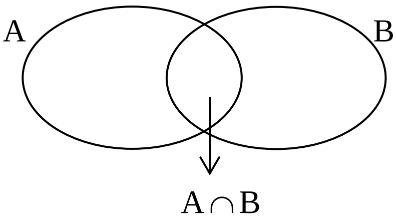
Kümelerin Birleşimi:

A <u>veya</u> B kümelerinden en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye "A birleşim B kümesi" denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.



Kümelerin Kesişimi:

A <u>ve</u> B kümelerinin her ikisine de ait olan ortak elemanların oluşturduğu kümeye "A kesişim B kümesi" denir ve $A \cap B$ ile gösterilir.

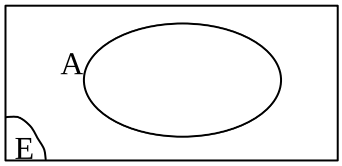


Birleşim ve Kesişim İle İlgili Özellikler:

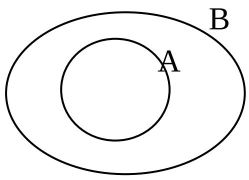
1.

$A \cup \varnothing = A$ $\quad$ $A \cup E = E$

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $\quad$ $A \cap E = A$



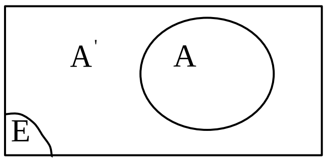
2. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$, $A \cap B = A$



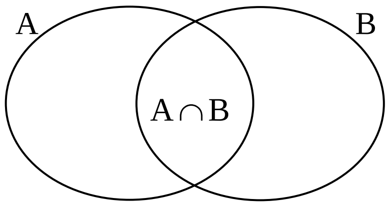
3.

$A \cup A' = E$

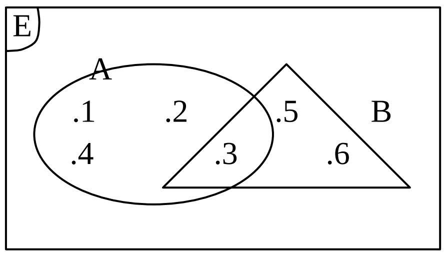
$A \cap A' = \varnothing$



4. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$



Örnek:



Yandaki şekilde verilenlere göre $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini liste yöntemiyle yazınız.

çözüm: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad$ $A \cap B = \{3\}$

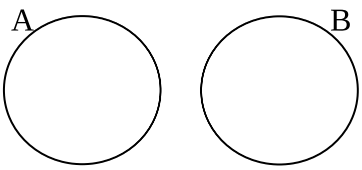
Örnek: X= $\{1,2\}$, Y= $\{1,2,3,4\}$, Z= $\{4,5\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre;

a) $X \cup Y = \{1,2,3,4\}$ d) $X \cap Z = \{\ \}$ veya $\varnothing$

b) $X \cap Y = \{1,2\}$ e) $Y \cup Z = \{1,2,3,4,5\}$

c) $X \cup Z = \{1,2,4,5\}$ f) $Y \cap Z = \{4\}$

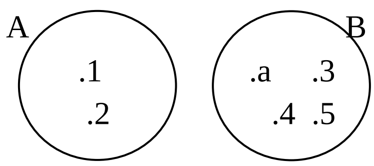
Ayrık Kümeler: Ortak elemanı olmayan yani, kesişimleri $\varnothing$ olan kümelere "ayrık kümeler" denir.



$A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ A ve B ayrık kümelerdir.

Örnek: A= $\{1,2\}$, B= $\{a,3,4,5\}$ kümeleri ayrık kümeler midir?

çözüm:

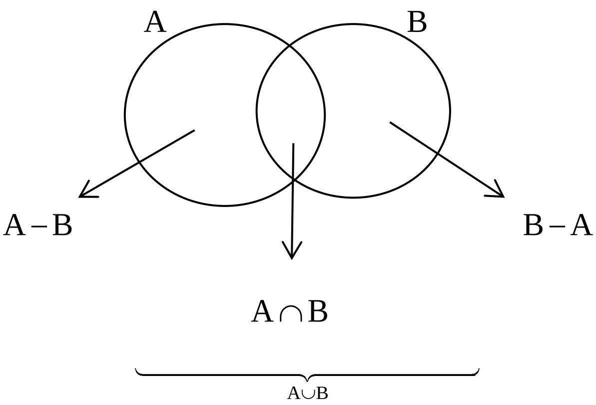


$A \cap B = \varnothing$ olduğundan, A kümesi ile B kümesi ayrık kümelerdir.

NOT: A ve B kümeleri ayrık kümeler ise: s($A \cup B$)= s(A)+s(B)

İki Kümenin Farkı:

A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye “A kümesinin B kümesinden farkı” denir. A kümesinin B kümesinden farkı, “A fark B” şeklinde kısaca söylenebilir ve “A-B” ya da “A\B” şeklinde gösterilir.



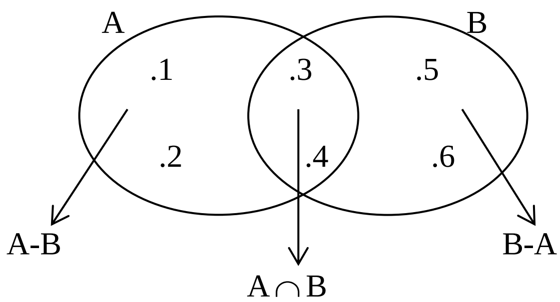
$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ kümeleri veriliyor. Venn şeması yardımıyla aşağıda verilen kümeleri belirleyiniz.

a)A-B=? b)B-A=?

çözüm:



$A - B = \{1, 2\}$

$B - A = \{5, 6\}$