TOPLAM VE ÇARPIM SEMBOLLERİ

Toplam Sembolü:

$f(k)=a_k$ olsun. $r,n \in Z$ ve $r \leq n$ olmak üzere $a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_n$ toplamını kısaca, $\sum_{k=r}^{n} a_k$ şeklinde gösteririz. Burada r alt sınır, n üst sınır ve k da değişkendir($r \leq k \leq n$, $k \in Z$).

$$\boxed{\sum_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_n}$$

Örnekler:

$$\sum_{k=-2}^{2} k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 = 0$$

$$\sum_{i=2}^{5} \sqrt{i} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$$

$$\sum_{m=-3}^{-1} 5m = 5.(-3) + 5.(-2) + 5.(-1) = -30$$

$$\sum_{k=3}^{5} 7 = 7+7+7 = 3.7 = 21$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{24} - \sqrt{23}) + (\sqrt{25} - \sqrt{24}) = \sqrt{25} - \sqrt{1} = 5 - 1 = 4$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{17} \ln\left(1+\frac{2}{2k-1}\right) = ?$

çözüm: $\sum_{k=1}^{17} \ln\left(1+\frac{2}{2k-1}\right) = \ln\frac{3}{1} + \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{7}{5} + \ldots + \ln\frac{35}{33}$

$$= \ln\left(\frac{3}{1}.\frac{5}{3}.\frac{7}{5}\ldots\frac{35}{33}\right)$$

$$= \ln 35$$

Toplam Sembolünün Özellikleri:

1) $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{\text{n tane}} = n.c$

$\sum_{k=0}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{\text{(n+1) tane}} = (n+1).c$

2) $\sum_{k=r}^{n} c.a_k = c.\sum_{k=r}^{n} a_k ,\ c \in R$

3) $\sum_{k=r}^{n} (a_k \mp b_k) = \sum_{k=r}^{n} a_k \mp \sum_{k=r}^{n} b_k$

4) r<m<n olmak üzere, $\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ ’ dır.

5) $\sum_{k=r}^{n} \sum_{i=t}^{m} a_{ki} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=r}^{n} a_{ki}$

6) $\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=r-p}^{n-p} a_{k+p}$

Uyarı: Toplam sembolünün alt sınırını değiştirmek (genellikle 1 yapmak) gerekebilir. Bu durumda alt sınıra eklenen sayı, üst sınıra da eklenir ve bu sayı toplam sembolünün önündeki ifadede bulunan değişkenden çıkarılır.

Örnekler:

$$\sum_{k=1}^{19} 7 = \underbrace{7+7+7+...+7}_{19\ \text{tane}} = 19.7 = 133$$

$$\sum_{k=0}^{10} 5 = \underbrace{5+5+...+5}_{11\ \text{tane}} = 5.11 = 55$$

$$\sum_{k=-2}^{17} 2k^2 = 2.\sum_{k=-2}^{17} k^2$$

$$\sum_{k=2}^{15} (k^2+k-4) = \sum_{k=2}^{15} k^2 + \sum_{k=2}^{15} k - \sum_{k=2}^{15} 4$$

$$\sum_{k=-2}^{16} k^3 = \sum_{k=-2}^{10} k^3 + \sum_{k=11}^{16} k^3$$

$$\sum_{k=1}^{7}\sum_{m=2}^{10} (2k+km+1) = \sum_{m=2}^{10}\sum_{k=1}^{7} (2k+km+1)$$

$$\sum_{k=7}^{19} (k^2+k+1) = \sum_{k=7-6}^{19-6} \left[(k+6)^2 + (k+6) + 1 \right] = \sum_{k=1}^{13} \left(k^2+13k+43 \right)$$

$$\sum_{n=-3}^{17} (n+4).(m+3) = \sum_{n=-3+4}^{17+4} (n-4+4).(m+3) = \sum_{n=1}^{21} n(m+3)$$

Çok Kullanılan Toplam Formülleri:

1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n.(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+...+2n = n.(n+1)$

3) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

4) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

5) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$

6)$r \neq 1$ ve her $n \in N$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1+r+r^2+...+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$

Uyarı: Toplam sembolünün alt sınırı 1 (veya 0)' dan farklı ise toplam formüllerini kullanmak için, toplam sembolünün özelliği kullanılarak alt sınır 1 (veya 0) yapılır.

Örnek: $\sum_{k=1}^{99} k = 1+2+3+...+99 = \frac{99.(99+1)}{2} = 4950$

Örnek: $A=19+20+21+...+100$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

A=19+20+21+...+100=(1+2+3+...+100) − (1+2+3+...+18)

$$=\sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{18} k$$

$$=\frac{100.(100+1)}{2}-\frac{18.(18+1)}{2}$$

=4879

Örnek: $A=2+4+6+...+100$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2k=2+4+6+...+2n=n.(n+1)}$$

$$A=2+4+6+...+100=\sum_{k=1}^{50} 2k=50.(50+1)=2550$$

Örnek: A=1+3+5+...+99 toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (2k\text{-}1)=1+3+5+...+(2n\text{-}1)=n^2}$$

$$A=1+3+5+...+99=\sum_{k=1}^{50} (2k-1)=50^2=2500$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{90} (2k+3)=2.\sum_{k=1}^{90} k+\sum_{k=1}^{90} 3$

$$=2.\frac{90.91}{2}+90.3$$

=8460

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c=\underbrace{c+c+c+...+c}_{\text{n tane}}=n.c}$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{11} k^2 = \frac{11.(11+1).(2.11+1)}{6} = 506$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

Örnek: $\sum_{k=3}^{20} k^3 = ?$

çözüm:

1.yol:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2}$$

$$\sum_{k=3}^{20} k^3 = \left(1^3 + 2^3 + ...20^3\right) - \left(1^3 + 2^3\right)$$

$$= \left(\frac{20.21}{2}\right)^2 - \left(1^3 + 2^3\right)$$

$$= 210^2 - 9$$

$$= 44091$$

2.yol:

$$\sum_{k=3}^{20} k^3 = \sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{2} k^3$$

$$= \left(\frac{20.21}{2}\right)^2 - \left(\frac{2.3}{2}\right)^2$$

$$= 210^2 - 9$$

$$= 44091$$

Örnek: $A=1+2+2^2+2^3+...+2^{17}$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$r=2,\ n-1=17 \Rightarrow n=18$

$A=1+2+2^2+2^3+...+2^{17}$

$=\sum_{k=1}^{18} 2^{k-1}$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=1+r+r^2+...+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}}$$

$=\frac{2^{18}-1}{2-1}$

$=2^{18}-1$

Örnek: $\sum_{k=8}^{10}\left(k^2+k\right)=\sum_{k=8}^{10}k(k+1)$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

$=8.9+9.10+10.11$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}}$$

$=272$

Örnek: $A=\sum_{k=-7}^{12}(2k+3)$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$A=\sum_{k=-7+8}^{12+8}\left[2(k-8)+3\right]$

$=\sum_{k=1}^{20}(2k-13)$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}}$$

$$= 2.\frac{20.21}{2} - 20.13 \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+...+c}_{\text{n tane}} = n.c}$$

$$=160$$

Örnek: f(x)= $2x^2 - 50$ olduğuna göre, $\sum_{m=-4}^{5} f(m)$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm: $\sum_{m=-4}^{5} f(m) = \sum_{m=-4}^{5}\left(2m^2 - 50\right)$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

$$= \sum_{m=-4+5}^{5+5}\left[2\left(m-5\right)^2 - 50\right] \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n.(n+1)}{2}}$$

$$= \sum_{m=1}^{10}\left(2m^2 - 20m\right)$$

$$=2.\ \frac{10.11.21}{6} - 20.\frac{10.11}{2}$$

$$= 770 - 1100$$

$$= -330$$

Örnek: A= $\sum_{k=1}^{7}\sum_{m=0}^{6}(m-k+1)$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm: $\sum_{m=0}^{6}(m-k+1) = \frac{6.7}{2} - 7k + 7.1$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n.(n+1)}{2}}$$

=28-7k (k sabit)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+...+c}_{\text{n tane}} = n.c}$$

$$A=\sum_{k=1}^{7}(28-7k)$$

$$=7.28-7.\frac{7.8}{2}$$

$$=0$$

Örnek: $A=\sum_{n=3}^{11}\left[\left(n-2\right)\left(n-3\right)+1\right]=?$

çözüm:

$$A=\sum_{n=3-2}^{11-2}\left[\left(n+2-2\right).\left(n+2-3\right)+1\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{9}\left[n\left(n-1\right)+1\right]=\sum_{n=1}^{9}\left(n^2-n+1\right)$$

$$=\frac{9.10.19}{6}-\frac{9.10}{2}+9.1$$

$$=285-45+9$$

$$=249$$