

# **FZM 306: Kuantum Mekanikii II**

## **2. HAFTA**

**Deniz Yılmaz**

# KAYNAKLAR

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:

**Kuantum Mekanii ve Atom Fizięi Ders Notları**

**Z. Zekeriya AYDIN**

**Ankara Üniversitesi**

# ÇOK PARÇACIKLI SİSTEMLER

Bu bölümde,

- \* Tek parçacık formalizmini çok parçacıklı sistemlere genelleyip, özellikle iki cisim problemini inceleyeceğiz.
- \* Daha sonra  $N$ -özdeş parçacıklı sistemleri ele alarak, tabakalı atom ve çekirdek yapılarına yol açan genelleştirilmiş Pauli ilkesine değineceğiz.

# N Parçacıklı Sistemin Schrödinger Denklemi

N parçacıklı sistem  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  koordinatları ve  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N$  momentumlarıyla belirtilir.

Schrödinger denklemi ise

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = H(r_1, r_2, \dots, r_N; -i\hbar \nabla_1, \dots, -i\hbar \nabla_N) \psi(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

olarak yazılır. Bu denklemin çözümü olan  $\psi(r_1, r_2, \dots, r_N)$  dalga fonksiyonu tüm parçacık koordinatları üzerinden integre edilirse 1'e eşit olmalıdır:

$$\iiint |\psi(r_1, r_2, \dots, r_N)|^2 d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N = 1$$

N parçacıklı sistemin dinamik değişkenleri

$$A_{op} = A(r_1, r_2, \dots, r_N; -i\hbar \nabla_1, \dots, -i\hbar \nabla_N)$$

olacağından, beklenen değerler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle A \rangle = \iiint \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) A_{op} \psi(r_1, r_2, \dots, r_N) d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N = 1$$

Böyle bir sistemin doğrusal momentum işlemcisi

$$P = -i\hbar \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i}$$

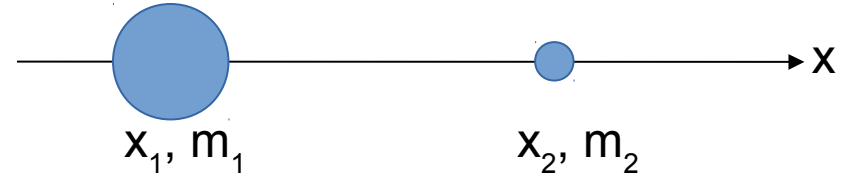
olmak üzere Hamilton işlemcisi

$$H = -\hbar^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \nabla_{r_i}^2 + V(r_1 - r_2, r_1 - r_3, \dots, r_{N-1} - r_N)$$

şeklindedir ve  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$  ötelenme dönüşümleri altında değişmez kalır.

## 2 Parçacıklı Sistem

$x_1$  ve  $x_2$  konumlarında bulunan  $m_1$  ve  $m_2$  kütleli iki farklı parçacıklı bir sistem düşünelim.



Parçacık koordinatları sistemi:  $(x_1, x_2)$

Kütle Merkezi (KM) sistemi:  $(X_{KM}, x)$

$$X_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x = x_2 - x_1$$

## a) Etkileşmeyen İki Parçacık Hali

$V(\mathbf{x}) = 0$  olduğundan Hamiltoniyen basitçe iki parçacığın kinetik enerjilerinin toplamıdır:

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2}$$

Schrödinger denklemini ise

$$-\hbar^2 \left( \frac{1}{2m_1} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2m_2} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \psi(x_1, x_2) = E \psi(x_1, x_2)$$

olarak yazabiliriz. Bu parçalı diferansiyel denklem

$$\psi(x_1, x_2) = U_1(x_1) U_2(x_2) \quad E = E_1 + E_2$$

değişkenlerine ayrılarak çözülebilir:

$$\psi(x_1, x_2) = C e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$$

Etkileşmeyen iki parçacık halindeki Schrödinger denklemi KM sisteminde de değişkenlerine ayrılarak çözülebilir.

$$M = m_1 + m_2 \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

olmak üzere KM' de Schrödinger denklemi

$$-\hbar^2 \left( \frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial X_{KM}^2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(X_{KM}, x) = E \psi(X_{KM}, x)$$

olarak yazılır ve çözümü

$$\psi(x_1, x_2) = C e^{iKX_{KM} + ikx}$$

şeklinde. Bu çözüm parçacık koordinatlarında bulunan çözümle aynı olmalıdır. Sistemin enerjisi her iki koordinat sisteminde de aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_2} = \frac{\hbar^2 K^2}{2M} + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$



## b) Etkileşen İki Parçacık Hali

Parçacıklar arasındaki etkileşme kuvveti,  $V(x_2-x_1)$  gibi bir potansiyelden türer. Potansiyel terimi  $x_2-x_1$  farkına bağlı olduğundan, Schrödinger denklemi  $x_1$  ve  $x_2'$  ye göre değişkenlerine ayrılamaz. Fakat KM koordinatlarındaki Schrödinger denklemi  $X_{KM}$  ve  $x'$  e göre değişkenlerine ayrılabilir:

$$\left( \frac{-\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial X_{KM}^2} + \frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + V(x) \right) \psi(X_{KM}, x) = E \psi(X_{KM}, x)$$

$$\psi(X_{KM}, x) = \Phi(X_{KM}) U(x)$$

$\Phi(X_{KM}) = e^{iKX_{KM}}$  çözümü  $X_{KM}$  noktasında toplanan tüm kütlelerin serbest olarak hareket ettiğini söyler. Kütle merkezi durgun alınırsa ( $K \equiv k_1 + k_2 = 0$ ) geriye yalnızca  $m_1$  ve  $m_2$  kütlelerinin  $V(x_2-x_1)$  potansiyelinin etkisiyle kütle merkezi etrafındaki hareketleri kalır. Bu da  $\mu$  indirgenmiş kütlelerinin  $V(x)$  içindeki hareketine eşdeğerdir:

$$\left( \frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) U(x) = \epsilon U(x)$$