

FZM 306: Kuantum Mekanikii II

3. HAFTA

Deniz Yılmaz

KAYNAKLAR

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:

Kuantum Mekanii ve Atom Fiziđi Ders Notları

Z. Zekeriya AYDIN

Ankara Üniversitesi

Özdeş Parçacıklar

Değişik zamanlarda değişik yerlerdeki atomlarda ölçülen enerji spektrumlarının hep aynı çıkması, doğadaki tüm elektronların özdeş olduklarının kanıtıdır.

Çekirdek spektrumlarının da hep aynı kalmasına bakarak, doğadaki tüm protonların ve nötronların birbirinden ayırdedilemez olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Bir parçacığı belirtmek için konum ve enerjisini veriyoruz. Parçacıkları ya da parçacık durumlarını etkileyecek olan kuantum sayıları vardır. Örneğin elektron, proton, nötron ve benzeri parçacıklar spin denilen bir “iç” açısal momentuma sahiptir.

a) Simetrik ve Antisimetrik Dalga Fonksiyonları

Özdeş parçacıklardan oluşan bir sistemin Hamiltoniyeni, parçacıkların yerdeğiştirmeleri altında tam simetrik olmalıdır.

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V(x_1, x_2)$$

biçiminde yazılan Hamiltoniyen, kütleleri aynı olan 1 ve 2 parçacıklarının değiş-tokuşu altında simetrik kalacağına göre

$$H(1, 2) = H(2, 1)$$

olmalıdır. Genel olarak, N özdeş parçacıklı bir sistemin

$$H(1, 2, \dots, N) = H(x_1, p_1, \sigma_1; x_2, p_2, \sigma_2; \dots; x_N, p_N, \sigma_N)$$

Hamiltoniyeni her parçacık çiftinin değiş tokuşuna göre simetrik olmalıdır.

Bu sistemin

$$\psi(1, 2, \dots, N) = \psi(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2; \dots; x_N, \sigma_N)$$

dalga fonksiyonunun, parçacıkların değiş tokuşu altında nasıl olduğunu görmek için değiş tokuş işlemcisini tanımlamalıyız. İki parçacığın herşeyiyle birlikte yerlerini değiştiren bir işlemci tanımlayalım:

$$P_{12}\psi(1, 2) \equiv \psi(2, 1)$$

Öyle ki

$$(P_{12})^2 = I$$

dir. Burada I birim işlemcidir. O halde P_{12} değiş tokuş işlemcisinin özdeğerleri, parite işlemcisi gibi ± 1 ' dir. $+1(-1)$ özdeğerine simetrik (antisimetrik) dalga fonksiyonu karşı gelir:

$$\varphi_{\pm 1} \equiv \psi^{S(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(1, 2) \pm \psi(2, 1)]$$

b) Pauli' nin Spin-İstatistik Yasası: Fermiyonlar ve Bozonlar

Özdeş parçacıklı bir sistemin dalga fonksiyonunu, başlangıçta isteğimize bağlı olarak simetrik ya da antisimetrik seçemeyiz. Doğada bulunan temel parçacıklar iki sınıfa ayrılırlar: bir sınıftakiler tamamıyla simetrik dalga fonksiyonuna sahipken diğer sınıftakiler antisimetrik dalga fonksiyonuna sahiptirler.

Pauli' nin spin istatistik yasası şudur:

1) Spinleri $\hbar/2$, $3\hbar/2$, $5\hbar/2$, ... olan özdeş parçacıklardan oluşan sistemler, daima **antisimetrik** dalga fonksiyonları ile betimlenirler. Bu parçacıkların istatistiğine **Fermi-Dirac** istatistiği denir ve parçacıklar **fermiyon** olarak adlandırılırlar. *Elektronlar, müyonlar, protonlar* bu sınıfa girer.

2) Spinleri 0 , \hbar , $2\hbar$, ... olan özdeş parçacıklardan oluşan sistemler, daima **simetrik** dalga fonksiyonları ile betimlenirler. Bu parçacıkların istatistiğine **Bose-Einstein** istatistiği denir ve parçacıklar **bozon** olarak adlandırılırlar. *π -mezonları, K-mezonları, fotonlar, gravitonlar* bu sınıfa girer.

Etkileşmeyen N-Fermiyonlu Sistem

Özel bir hal olarak, birbirleriyle etkileşmeyen fakat genel bir $V(x)$ potansiyeli içinde bulunan özdeş parçacıklar sistemini ele alalım.

$$H(1,2, \dots, N) = H(1) + H(2) + \dots + H(N)$$

Burada her bir parçacığın Hamiltoniyeni

$$H(i) = \frac{P_i^2}{2m} + V(i)$$

şekindedir. Tüm sistemin

$$H(1,2, \dots, N) U_E(1,2, \dots, N) = E U_E(1,2, \dots, N)$$

enerji özdeğer denkleminin bir çözümü

$$U_E(1,2, \dots, N) = U_{E_1}(1) U_{E_2}(2) \dots U_{E_N}(N)$$

olup $E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$ dir.

Fonksiyonlardaki 1, 2, ... , N etiketleri $x_1\sigma_1, x_2\sigma_2, \dots, x_N\sigma_N$ anlamını taşımaktadır. σ' lar parçacıkların spin durumlarını belirtir. Böylece tek parçacık dalga fonksiyonu

$$U_{E_i\sigma_i}(x_i) \equiv U_{E_i}(x_i) \chi_{\sigma_i}(i)$$

şeklinde yer dalga fonksiyonu çarpı spin dalga fonksiyonudur.

Bu durumda etkileşmeyen iki elektronlu sistem için dalga fonksiyonu

$$U^{(A)}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[U_{E_1}(x_1) U_{E_2}(x_2) \chi_{\sigma_1}(1) \chi_{\sigma_2}(2) - U_{E_1}(x_2) U_{E_2}(x_1) \chi_{\sigma_1}(2) \chi_{\sigma_2}(1) \right]$$

olarak yazılabilir.

Dalga fonksiyonu iki elektron aynı spin durumundayken, $\sigma_1 = \sigma_2 = +$ ise

$$U^{(A)}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[U_{E_1}(x_1) U_{E_2}(x_2) - U_{E_1}(x_2) U_{E_2}(x_1) \right] \chi_+(1) \chi_+(2) = U^{(A)}(x_1, x_2) \chi^{(S)}(1,2)$$

İki elektron farklı spin durumundayken $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ve $E_1 = E_2$ ise

$$U^{(A)}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\chi_+(1) \chi_-(2) - \chi_+(2) \chi_-(1) \right] U_{E_1}(x_1) U_{E_1}(x_2) = \chi^{(A)}(1,2) U^{(S)}(x_1, x_2)$$

şekline indirgenir. $E_1, \sigma_1 = +$ durumuna bir elektron bulunduğu, ikinci elektron da aynı duruma konamaz; farklı olan $E_1, \sigma_1 = -$ durumuna yerleştirilebilir.

Bir kuantum durumuna yerleşmiş olan bir elektron, ikinci bir elektronu yanına kabul etmez! Bu Pauli' nin spin-istatistik bağlantısı yasasının bir sonucu olarak ortaya çıkan **PAULİ DIŞARLAMA** ilkesidir.

Birbirleriyle etkileşmeyen N elektronlu sistemin dalga fonksiyonunu aşağıdaki determinantla (**SLATER DETERMİNANTI**) ifade edebiliriz:

$$U^{(A)}(1,2,\dots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} U_{E_1\sigma_1}(x_1) & U_{E_1\sigma_1}(x_2) & \dots & U_{E_1\sigma_1}(x_N) \\ U_{E_2\sigma_2}(x_1) & U_{E_2\sigma_2}(x_2) & \dots & U_{E_2\sigma_2}(x_N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{E_N\sigma_N}(x_1) & U_{E_N\sigma_N}(x_2) & \dots & U_{E_N\sigma_N}(x_N) \end{vmatrix}$$

Bu determinantta herhangi iki sütunun ($x_i \leftrightarrow x_j$) ya da iki satırın ($E_i, \sigma_i \leftrightarrow E_j, \sigma_j$) değiştirirseniz determinant işaret değiştirir. Yani determinant, herhangi iki parçacığın değiş tokuşu altında dalga fonksiyonun antisimetrikliğini garantiler.