ORAN VE ORANTI

ORAN:

Aynı birimle ölçülen iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına "oran" denir.
a'nın b'ye oranı; $\frac{a}{b}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1: $\frac{200gr}{300gr}, \frac{15cm^3}{20cm^3}, ...$ birer orandır.

Örnek 2: $\frac{200gr}{500lt}, \frac{30cm}{1kg}, \frac{5000TL}{600cm}, ...$ ifadeleri birer oran değildir. Çünkü birbirine bölünen ifadeler aynı birimde değildir. Halbuki birbirine oranlanarak yazılan ifadelerin aynı birimde olması gerekiyordu..

Örnek 3: Ali'nin 50 TL'si, Ayşe'nin 100 TL'si olduğuna göre, Ali'nin parasının Ayşe'nin parasına oranı;

$$\frac{50TL}{100TL} = \frac{1}{2}$$

dir. Yani, Ali'nin parası Ayşe'nin parasının $\frac{1}{2}$'si (yarısı) kadardır.

Örnek 4: Bir sınıftaki öğrencilerin %30'u İngilizce, geri kalanı ise Fransızca bilmektedir. İngilizce bilenlerin sayısının Fransızca bilenlerin sayısına oranı kaçtır?

çözüm:

Sınıf mevcudu :100 kişi olsun.
İngilizce bilenlerin sayısı: 30 kişi olur.
Fransızca bilenlerin sayısı: 70 kişi olur.

$$\frac{\text{İngilizce bilenler}}{\text{Fransızca bilenler}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

olarak bulunur.

ORANTI:

İki veya daha fazla oranın eşitliğine “orantı” denir. Yani a, b, c, d $\in$ R olmak üzere $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ gibi iki oran birbirine eşit ise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ifadesi bir orantıdır.

Her orantının eşit olduğu pozitif reel sayıya, “orantı sabiti” veya “orantı katsayısı” denir. Dolayısıyla her orantı denkleminin eşit olduğu bir k orantı sabiti vardır.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ (k= orantı sabiti)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısı a:b=c:d şeklinde de yazılabilir. Burada a ile d “dışlar”, b ile c “içler” adını alır.

a, b, c, d, e, f $\in$ R olmak üzere

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

ifadesi de bir orantıdır. Bu üçlü orantıyı

a:c:e = b:d:f = k

şeklinde yazmak da mümkündür.

ORANTININ ÖZELLİKLERİ:

a, b, c, d $\in$ R olmak üzere:

1)Bir orantıda her zaman dışlar çarpımı, içler çarpımına eşittir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

2) Bir orantıda dışlar yer değiştirebilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

3)Bir orantıda içler yer değiştirebilir.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

4) Bir orantıda oranların çarpmaya göre tersleri alınabilir.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

5)Bir orantıda payların toplamı veya farkı paya, paydaların toplamı veya farkı paydaya yazılırsa oran yine değişmez.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \text{ ise } \frac{a+c}{b+d}=k \text{ ve } \frac{a-c}{b-d}=k\text{' dır.}$$

6) Orantı denkleminde yer alan oranlar sadeleştirilebilir veya genişletilebilir.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow m\neq 0, n\neq 0 \text{ olmak üzere } \frac{m.a}{m.b}=\frac{n.c}{n.d}=k\text{' dır.}$$

7) Bir orantıda oranların pay ve paydaları kendi aralarında toplanıp veya çıkarılıp birbirine oranlanırsa orantı sabiti k' nın değeri değişmez.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=...=k\Leftrightarrow\frac{a\mp c\mp ...}{b\mp d\mp ...}=k \text{ olur.}$$

8) Bir orantıda oranlardan birinin pay ve paydası herhangi bir $m\neq 0$ sayısı ile, diğerinin pay ve paydası herhangi bir $n\neq 0$ sayısı ile çarpılıp, paylar ve paydalar kendi aralarında toplanarak ya da çıkarılarak birbirlerine oranlanırsa orantı sabiti k' nın değeri değişmez.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Leftrightarrow m\neq 0, n\neq 0 \text{ olmak üzere } \frac{m.a}{m.b}=\frac{n.c}{n.d}=\frac{m.a\mp n.c}{m.b\mp n.d}=k$$

9) Bir orantıda oranların her birinin n. dereceden kuvveti veya kökü alınırsa orantı sabiti k'nın da aynı dereceden kuvveti veya kökü alınır.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Leftrightarrow\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}=k^n$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Leftrightarrow\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}=\sqrt[n]{k}$$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER:

1) $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$ ise $\frac{x}{x+2y}$ ifadesinin değeri kaçtır?

çözüm:

1.yol:

Soruda verilen eşitlikte içler dışlar çarpımı yaparsak:

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{4}\Rightarrow y=4.x$$

olur. Son eşitlikte, bulduğumuz y'nin 4x'e eşitliği kullanılarak sorulan ifadede y yerine 4x yazılırsa:

$$\frac{x}{x+2y}=\frac{x}{x+2.(4x)}=\frac{x}{9x}=\frac{1}{9}$$ bulunur.

2. yol:

$\frac{x}{x+2y}$ 'nin çarpmaya göre tersi $\frac{x+2y}{x}$ 'dir.

$$\frac{x+2y}{x}=\frac{x}{x}+2\frac{y}{x}=1+2.\frac{4}{1}=1+8=9$$

$$\frac{x+2y}{x}=9\Rightarrow\frac{x}{x+2y}=\frac{1}{9}$$

olarak elde edilir.

2) $\frac{a+b}{a}=3$ ise $\frac{a+b}{b}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

1.yol:

$$\frac{a+b}{a}=3\Rightarrow 3a=a+b$$

$$\Rightarrow b = 2a$$

Son eşitlikte bulduğumuz b'nin 2a'ya eşitliği kullanarak sorulan ifadede b yerine 2a yazarsak:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a+2a}{2a} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

2.yol:

$$\frac{a+b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

$$\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ olarak elde edilir.}$$

3) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{p}{r} = 5$ ise $\frac{x.z.r}{y.t.p}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

1.yol: $\frac{x}{y} = 5 \Rightarrow x = 5y$

$$\frac{z}{t} = 5 \Rightarrow z = 5t$$

$$\frac{p}{r} = 5 \Rightarrow p = 5r \text{ 'dir.}$$

x, z ve p'nin bulduğumuz değerlerini sorulan ifadede yerlerine yazarsak:

$$\frac{x.z.r}{y.t.p} = \frac{5y.5t.r}{y.t.5r} = 5$$

sonucu elde edilir.

2.yol: $\frac{x.z.r}{y.t.p} = \frac{x}{y}.\frac{z}{t}.\frac{r}{p} = 5.5.\frac{1}{5} = 5$ bulunur.

4) $x, y, z \in R^-$ ve $\frac{x}{0,2} = \frac{y}{0,1} = \frac{z}{0,5}$ ise x, y, z sayıları arasındaki sıralama nasıldır?

çözüm:

$$\frac{x}{0,2} = \frac{y}{0,1} = \frac{z}{0,5} = k \Rightarrow x = 0,2k, y = 0,1k, z = 0,5k \text{ olur.}$$

$x,\ y,\ z \in R^+$ olsaydı: $z > x > y$ olurdu. Ancak $x,\ y,\ z \in R^-$ olduğundan: $z < x < y$ sonucu elde edilir.

5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 3$ ise $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 3 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = 9 \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = 9 \text{ olarak bulunur.}$$

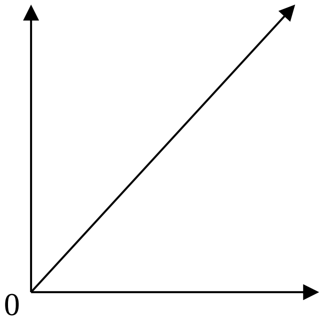
DOĞRU ORANTI:

Birbirine bağlı iki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyor ise veya biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyor ise bu tür çokluklara "doğru orantılıdır" denir. "Doğru orantılıdır" ifadesi yerine çoğu kez kısaca "orantılıdır" sözcüğü kullanılır.

k orantı sabiti olmak üzere, x ile y doğru orantılı olsun. Bu durumda orantı denklemi:

$$\boxed{\frac{x}{y} = k \Rightarrow x = k.y}$$

şeklindedir.



Şekil 1. Doğru orantı grafiği

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER:

1) x+3 ve $y-3$ çoklukları doğru orantılıdır. x=5 iken y=7 oluyorsa x=1 iken y kaçtır?

çözüm:

x+3, $y-3$ ile doğru orantılı olduğundan doğru orantı denklemi:

$$x+3=k.(y-3)$$

şeklindedir. İlk olarak x=5, y=7 değerleri bu denklemde yerine yazılarak k orantı sabiti bulunursa:

$$5+3 = k.(7-3) \Rightarrow 8=k.4 \Rightarrow k=2$$

Bu durumda orantı denklemi; $x+3=2.(y-3)$ biçimine gelir. Şimdi de ikinci durumda verilen x=1değerini denklemde yerine yazarak y'yi bulalım:

$$1+3=2.(y-3) \Rightarrow 4=2.(y-3) \Rightarrow y-3=2 \Rightarrow y=5$$

2) x, y,z sayıları sırasıyla 13,12, 5 sayıları ile orantılıdır. x+z-y=6 olduğuna göre x'in değeri kaçtır?

çözüm:

x, y, z sırasıyla 13, 12, 5 sayıları ile doğru orantılı olduğundan;

$x=13k, \quad y=12k, \quad z=5k$

şeklinde alınabilir. Bu değerler verilen eşitlikte yerlerine yazılırsa:

$x+z-y=6 \Rightarrow 13k+5k-12k=6$

$\Rightarrow 6k=6$

$\Rightarrow k=1$

$x=13k \Rightarrow x=13.1=13$

olarak bulunur.

3) $\frac{a}{2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ ve $3a+b-c=10$ olduğuna göre c kaçtır?

çözüm:

$\frac{a}{2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k \Rightarrow a=2k, b=4k, c=5k$ alınabilir.

$3a+b-c=10 \Rightarrow 3.(2k)+4k-5k=10$

$\Rightarrow 5k=10$

$\Rightarrow k=2$

$c=5k \Rightarrow c=5.2=10$ olarak bulunur.

4)Un, yağ ve şeker ağırlık bakımından sırasıyla 7:5:4 oranında karıştırılarak 48 kg'lık bir hamur yapılıyor. Bu hamurda kullanılan un miktarı, yağ miktarından kaç kg fazladır?

çözüm:

Un, yağ ve şeker sırasıyla 7, 5, 4 ile doğru orantılı ise:

Un=7k, Yağ=5k, Şeker=4k

miktarda alınabilir.

Un+Yağ+Şeker=48kg $\Rightarrow$ 7k+5k+4k=48

$\Rightarrow$16k=48

$\Rightarrow$k=3

Un=7k= 7.3=21 kg

Yağ=5k=5.3=15 kg

bulunur. O halde hamurda kullanılan un miktarı, yağ miktarından;

$21-15$=6 kg fazladır.

5) 20 m^2 'lik bir yüzey 4 saatte boyanabiliyor. Buna göre 50 m^2 'lik yüzeyi boyamak için kaç saat gerekir?

çözüm:

Öncelikle verilen aynı birimdeki çoklukları alt alta yazarak orantı kuralım:

20 m^2 'lik yüzey — 4 saatte boyanırsa
50 m^2 'lik yüzey — x saatte boyanır.
D.O.

Verilen çoklukları bilinmeyen çoklukla karşılaştırdığımızda boyanacak yüzey arttığında bu yüzeyi boyamak için gereken sürenin de artacağını söyleyebiliriz. Bu nedenle burada ilişki aynı yönlü olup yapılan iş ile harcanana süre doğru orantılıdır. Doğru orantı problemleri çözülürken, daima terimlerin çapraz yönde olanları çarpılarak birbirine eşitlenir ve çözüme gidilir.

20.x=50.4$\Rightarrow$ x=$\frac{50.4}{20}=10$ saat bulunur.

6) Bir fabrikada 3 makine 6 saatlik çalışma süresinde 150 kutu meyve suyu paketleyebilmektedir. Aynı kapasitede çalışan 2 makine daha, aynı işlem için kullanılsaydı 6 saatlik sürede kaç kutu meyve suyu paketlenmiş olacaktı?

çözüm:

3 makine 150 kutu meyve suyu paketleyebiliyorsa
5 makine x kutu meyve suyu paketler.

D.O.

$3.x=150.5 \Rightarrow x=\frac{150.5}{3}=250$ kutu meyve suyu bulunur.